



DEPARTMENT OF ECONOMICS  
UNIVERSITY OF MILAN - BICOCCA

WORKING PAPER SERIES

**Un Modello Dinamico del Consumatore con  
Razionalità Limitata e Analisi Globale**

Ahmad. K. Naimzada, Fabio Tramontana

No. 117 - July 2007

Dipartimento di Economia Politica  
Università degli Studi di Milano - Bicocca  
<http://dipeco.economia.unimib.it>

# Un Modello Dinamico del Consumatore con Razionalità Limitata e Analisi Globale

**Ahmad. K. Naimzada**  
*Università degli Studi di Milano-Bicocca*

**Fabio Tramontana**  
*Università di Ancona*

## ***Riassunto***

Il modello tradizionale di comportamento del consumatore è basato sull'ipotesi di *razionalità*, ovvero il consumatore effettua le proprie scelte massimizzando la funzione d'utilità soggetta al vincolo di bilancio. Questo approccio richiede che ogni consumatore abbia una completa conoscenza delle proprie preferenze e quindi della propria funzione di utilità e che abbia le capacità computazionali per risolvere un problema di ottimo. Recentemente D'Orlando e Rodano (2006), partendo da un punto di vista che si richiama alla *razionalità limitata* degli agenti economici, ritenendo che i requisiti cognitivi impliciti nell'approccio tradizionale siano eccessivi, propongono un meccanismo decisionale di scelta ripetuta che dà luogo ad un processo dinamico di tipo *adattivo*. Gli stessi autori ritengono che l'eventuale convergenza, nel lungo periodo, del processo adattivo all'equilibrio del tradizionale modello statico del consumatore sia da interpretare come una *spiegazione evolutiva* del comportamento razionale. Anche in questo lavoro presentiamo e studiamo un meccanismo decisionale adattivo che presuppone una conoscenza locale della funzione di utilità e in cui il consumatore effettua le sue scelte nella direzione (in aumento o in diminuzione del consumo) degli incrementi del livello di utilità. Il modello in tempo continuo indica che, nel tempo, il processo adattivo converge sempre alla scelta razionale. Mentre nel tempo discreto la convergenza è più problematica perchè solo per opportune configurazioni dei parametri del modello questa situazione si realizza, altrimenti si ha l'emergere di vari fenomeni: molteplicità di equilibri, transizione a dinamiche periodiche e caotiche tramite biforcazioni e coesistenza di diversi tipi di attrattori con relativi bacini di attrazione. Per l'analisi di tali situazioni si ricorre alla *analisi globale* delle equazioni dinamiche tramite la tecnica delle *linee critiche* e la nozione di *punto focale*.

# 1. Introduzione

Nei modelli canonici della teoria economica si assume che gli agenti abbiano perfetta razionalità dal punto di vista della capacità informativa circa gli elementi salienti dell'ambiente economico in cui agiscono e da quello cognitivo e computazionale per la determinazione delle azioni che permettono di raggiungere una configurazione ottimale. Tale ipotesi di razionalità, a partire dal fondamentale contributo di Alchian (1950), non è più assunta come una caratteristica degli agenti economici esogenamente data, ma come l'esito asintotico nel tempo di processi dinamici di varia natura, evolutivi, di apprendimento e adattivi, tra loro intimamente intrecciati che distinguiamo solo per finalità di classificazione. Con i primi intendiamo quei processi di selezione ecologica di tipo darwiniano che, all'interno di una popolazione di agenti con differenti gradi e qualità di razionalità, possono far emergere agenti caratterizzati dalla perfetta razionalità che agiscono compiendo la *scelta razionale*; mentre i processi di apprendimento e adattivi caratterizzano modelli in cui agenti *razionalmente limitati* tentano di ricostruire elementi dell'ambiente in cui operano sulla base delle informazioni che scaturiscono dalle scelte passate e dall'agire del meccanismo di mercato; oppure nel loro processo decisionale applicano delle semplici *regole del pollice* che non richiedono eccessive capacità informative e computazionali nella direzione che gli agenti percepiscono più profittevole in termini di utilità, profitti, payoffs, etc. In sintesi, possiamo dire che l'approccio metodologico di questo filone di ricerca è quello di analizzare i contesti, le condizioni e i processi decisionali di agenti razionalmente limitati per i quali la scelta razionale emerge come tendenza finale attraverso vari processi dinamici (Conlisk 1998). Nella letteratura più recente dell'analisi economica e della teoria dei giochi, alla genuina impostazione originaria che aveva come finalità la ricerca di più solide basi cognitive per la scelta razionale, si è sovrapposta una letteratura più *strumentale* relativa alla molteplicità degli equilibri nei modelli: la ricerca di processi dinamici evolutivi, di apprendimento e adattivi in grado di selezionare all'interno di una imbarazzante molteplicità di equilibri (Lucas 1986, Sargent 1993).

Questa immensa e variegata letteratura è stata ed è applicata in vari contesti di interazione strategica, macroeconomici e microeconomici; in quest'ultimo caso, ci sembra, che vi sia una netta prevalenza delle applicazioni alla sfera della produzione e dell'impresa, mentre quelle relative al comportamento del consumatore siano molto ridotte; tra queste, il contributo di

D'Orlando e Rodano (2006). Il loro intento è quello di “...valutare se e in quali circostanze il comportamento massimizzante possa effettivamente emergere, anche nella domanda dei beni di consumo, come risultato di equilibrio di un processo dinamico che inizia con scelte per ipotesi non massimizzanti...” (D'Orlando e Rodano 2006, p. 427). Nel loro modello le preferenze sono date ma non perfettamente conosciute *ex-ante*, solo l'esperienza consente al consumatore di approfondire la conoscenza delle proprie preferenze, tramite il confronto tra l'utilità *ex-post*, effettivamente raggiunta dopo l'attività di consumo, e l'utilità attesa *ex-ante*, che ha portato il consumatore ad acquistare quel particolare paniere di beni. La discrepanza tra i due valori induce un cambiamento nel paniere consumato, dando luogo ad un processo dinamico; l'aspetto metodologico importante è che la scelta massimizzante costituisce un possibile esito asintotico, definito analiticamente come punto stazionario del sistema dinamico. I risultati ottenuti da D'Orlando e Rodano (2006) indicano, per determinati insiemi di configurazioni dei parametri, la scelta razionale come uno dei possibili esiti, accanto a dinamiche periodiche e caotiche, del processo dinamico; inoltre, mostrano che la endogenizzazione delle preferenze riduce l'insieme delle configurazioni dei parametri che inducono la convergenza alla scelta razionale.

Con il presente lavoro intendiamo assumere un approccio metodologico analogo a quello di D'Orlando e Rodano (2006); assumiamo, però, delle ipotesi alternative circa la capacità di informazione e il processo decisionale relativo alla scelta di consumo: le preferenze sono date ma la loro conoscenza non è globale bensì *locale* (il consumatore è in grado di valutare l'utilità che può scaturire solo da panieri molto simili al paniere di consumo corrente), inoltre il consumatore revisiona le proprie scelte di consumo tramite un meccanismo *adattivo* nella direzione di panieri che localmente incrementano la sua utilità. Questa regola comportamentale è poco “costosa” per il consumatore perché richiede solo la conoscenza locale della pendenza della funzione di utilità; queste informazioni possono essere acquisite con l'esperienza derivante dall'attività di consumo. Tali ipotesi danno luogo ad un sistema dinamico il cui unico stato stazionario è rappresentato dalla scelta razionale e di cui si analizzano i comportamenti dinamici. Un'altra finalità del presente lavoro è quello di mostrare i limiti dell'*analisi locale lineare*: questa è in grado di valutare la capacità attrattiva di uno stato stazionario soltanto in un suo intorno relativamente “piccolo” e non rispetto a tutte le condizioni iniziali possibili. Contestualmente, si propone, per la analisi dei sistemi non-lineari, l'adozione dell'approccio dell'*analisi globale*, una opportuna

combinazione di tecniche analitiche, numeriche e di computer-grafica, atte ad individuare la coesistenza di più tipi di attrattori (punti stazionari, traiettorie periodiche e caotiche) e i relativi bacini di attrazione.

Il meccanismo decisionale che proponiamo presenta una forte analogia con l'algoritmo del *gradiente*, ampiamente utilizzato nell'analisi numerica come metodo iterativo per la ricerca dei massimi delle funzioni (Kelley 1999). Anche nella teoria dei giochi il metodo del gradiente è stato utilizzato per la computabilità dell'equilibrio di Nash nei giochi in forma strategica a partire dal contributo di Rosen (1965). La finalità di queste ricerche rimane, diversamente dal nostro punto di vista, la analisi dei contesti e delle condizioni che permettono la determinazione numerica di particolari punti, siano essi punti di ottimo oppure equilibri di Nash.

In altri contributi, il meccanismo decisionale che proponiamo è stato interpretato come meccanismo di scelta di agenti economici privi della piena razionalità; la caratteristica comune di questi studi è quella di considerare unicamente la sfera della produzione e delle imprese. La maggior parte di questi contributi analizza il comportamento dinamico di mercati di tipo oligopolistico in cui le imprese agiscono avendo una conoscenza locale della funzione di domanda di mercato e nel decidere il volume di produzione del periodo successivo seguono una regola del gradiente (Arrow et al. (1958), Dixit (1986), Furth (1986), Varian (1992), Corchon e Mas-Colell (1996), Kirman et al. (1999) e Naimzada e Randon (2006)). In particolare, in questi studi si ricercano le condizioni sui parametri che favoriscono la convergenza all'equilibrio di Cournot-Nash; mentre in Bischi e Naimzada (2000), sempre in un gioco cournotiano, si mostra anche l'emergere di attrattori di natura diversa, orbite periodiche e caotiche, studiandone i differenti bacini di attrazione, ossia l'insieme delle condizioni iniziali che asintoticamente convergono ai vari attrattori (punti stazionari, orbite periodiche o caotiche). Solamente due lavori presentano il meccanismo decisionale, sotto considerazione, in altro contesto: Baumol e Quandt (1964) inseriscono tale “optimally imperfect decision process” nell'ambito di un modello di monopolio nel tempo continuo e ottengono, tramite la tecnica delle funzioni di Lyapunov, un risultato di convergenza globale al canonico equilibrio ottenibile nel caso statico con conoscenza globale della funzione di domanda; Naimzada e Ricchiuti (2006), considerando lo stesso modello in una evoluzione temporale di tipo discreto, mostrano come possano emergere dinamiche caotiche.

Nel paragrafo 2 presentiamo la costruzione generale del modello con preferenze esogene; nel paragrafo 3 si presenta l'analisi dinamica distinguendo tra il caso in cui la dinamica avviene nel continuo da quello nel discreto; nel paragrafo 4 il modello viene esteso considerando la formazione endogena delle preferenze secondo un meccanismo in cui il consumo passato di un bene influenza positivamente la preferenza presente per quel bene; il paragrafo 4 è diviso in tre parti, nella prima si effettua la analisi locale del punto stazionario, la sua capacità di attrarre traiettorie che hanno origine nel suo intorno, nella seconda parte si mettono a confronto i livelli di utilità corrispondenti ai diversi punti stazionari, mentre nella terza parte si considera l'analisi globale, coesistenza di attrattori e relativi bacini di attrazione; infine, nel paragrafo 5 si presentano le conclusioni e, individuando gli aspetti critici del lavoro, si indicano possibili sviluppi futuri. Nelle due appendici sono riportate due dimostrazioni circa la coesistenza e la stabilità di più punti stazionari.

## 2. Il Modello

Si consideri un consumatore le cui preferenze rispetto ai beni  $x$  e  $y$ , formatesi definitivamente nel corso del tempo tramite processi di socializzazione e di interazione con altri agenti, sono definite da una funzione di utilità Cobb-Douglas:

$$U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$

con  $0 < \alpha < 1$  e le cui scelte devono soddisfare il seguente vincolo di bilancio:

$$p_x x + p_y y = m .$$

dove i prezzi dei due beni,  $x$  e  $y$ , sono rispettivamente  $p_y = 1$ ,  $p_x = p$  e il reddito del consumatore è definito dalla costante positiva  $m$ ; sappiamo che in questo contesto la scelta razionale è data dal seguente vettore:

$$(x^*, y^*) = \left( \alpha \frac{m}{p}, (1 - \alpha)m \right).$$

Possiamo, senza difficoltà, supporre che il consumatore conosca i prezzi dei due beni e il suo reddito, mentre, per quanto riguarda le sue preferenze, diversamente dall'approccio canonico supponiamo che la conoscenza circa le proprie preferenze sia l'esito di un processo dinamico e materiale che coinvolge l'attività di consumo.

In particolare, da un punto di vista delle informazioni a disposizione dell'agente, facciamo due ipotesi tra loro intrecciate, che solo per comodità espositiva distinguiamo: *a*) la conoscenza circa le proprie preferenze ha natura *locale* e non *globale* e *b*) che tale conoscenza si concretizza *ex-post* tramite *l'esperienza di consumo*. Con la prima assunzione vogliamo sottolineare il fatto che difficilmente, nella realtà, i consumatori sono in grado di valutare i livelli di utilità corrispondenti ad infiniti possibili panieri di consumo e che, invece, sono in grado di valutare solamente l'utilità ottenibile da panieri, quantitativamente, molto simili al paniere che definisce il loro consumo corrente; invece con la seconda assunzione intendiamo porre l'accento sulla natura materiale del processo che produce informazioni circa le proprie preferenze: alla base della conoscenza delle preferenze vi è l'attività di consumo.

Dal punto di vista del processo decisionale, proponiamo un meccanismo che consente al consumatore di spostarsi localmente verso panieri caratterizzati da livelli di utilità superiori a quelli del paniere su cui si esplica l'esperienza di consumo corrente.

Per definire analiticamente l'insieme informativo e il meccanismo decisionale del consumatore *razionalmente limitato* introduciamo la funzione ausiliaria  $V(x)$  che definisce *l'utilità in termini del bene  $x$*  tramite il vincolo di bilancio ed otteniamo:

$$V(x) = x^\alpha (m - px)^{1-\alpha}.$$

Si può facilmente provare che la funzione  $V(x)$  è generalmente una funzione unimodale concava, che interseca l'asse delle ascisse nell'origine e nel punto  $m/p$ , e che, naturalmente, ha il suo unico punto di massimo in  $x = \alpha m/p$ , ovvero la scelta razionale relativamente al consumo del bene  $x$ . Da un punto di vista geometrico, è possibile mostrare la derivazione della funzione  $V(x)$  dalla funzione di utilità: come mostrato in figura 1a, dopo aver determinato la sezione della superficie che rappresenta la funzione di utilità tramite l'iperpiano a cui appartiene il vincolo di bilancio si effettua la proiezione ortogonale sul piano  $x/U$ .

Da un punto di vista interpretativo, variazioni di  $V(x)$  ottenute in seguito a variazioni di  $x$  rappresentano variazioni nell'utilità del consumatore in seguito a variazioni nel consumo del bene  $x$  (e del bene  $y$ ) e quindi indicano una *misura* del cambiamento dell'utilità al variare del paniere di consumo. Si possono, a questo proposito, fare due osservazioni generali rispetto al segno e all'intensità della variazione nell'utilità: tale variazione è positiva prima del punto di massimo, mentre è negativa dopo il punto di massimo; inoltre, l'intensità della variazione cambia al variare del paniere di consumo. Se utilizziamo la nozione di derivata come una buona approssimazione della variazione di utilità, questi aspetti della funzione  $V(x)$  sono osservabili nella figura 1b:

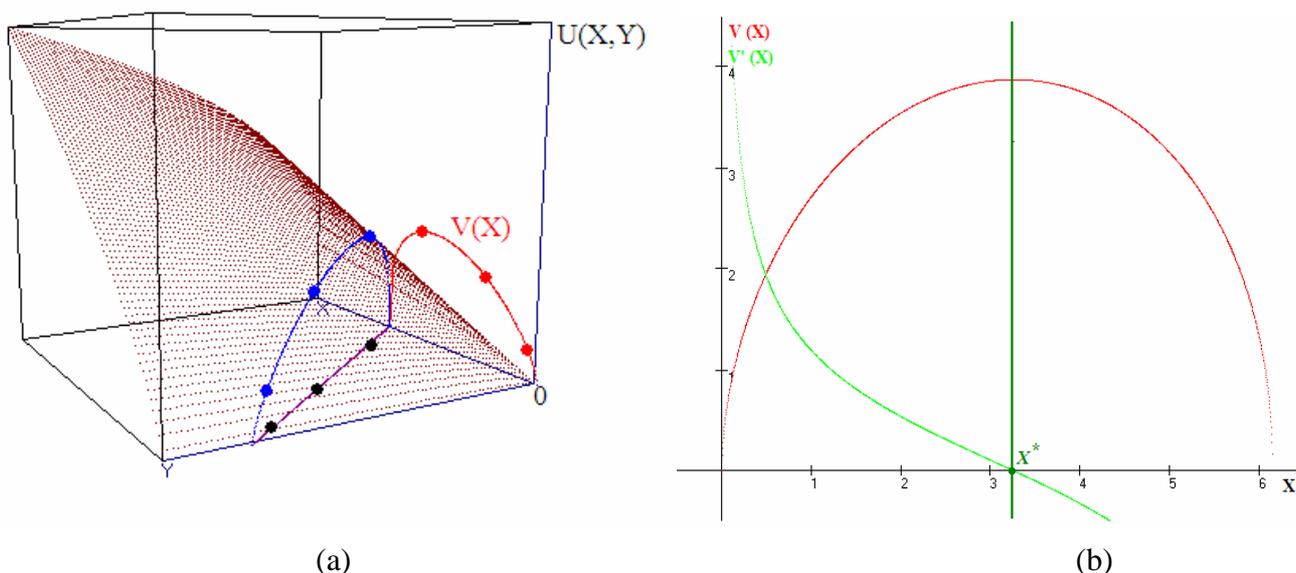


Figura 1

Naturalmente, la funzione  $V'(x)$  è decrescente e interseca l'asse delle ascisse nel punto di scelta razionale e si differenzia dalla nozione di utilità marginale perché quest'ultima è ottenuta a partire dalla funzione di utilità mantenendo costante il consumo dell'altro bene,  $y$ , mentre la prima, ottenuta rispettando il vincolo di bilancio, implica una variazione negativa nel consumo del bene  $y$ .

Il comportamento qualitativo della funzione  $V(x)$  dipende dalla configurazione dell'insieme dei parametri; nella seguente figura si intende mostrare l'influenza del coefficiente di preferenza,  $\alpha$ , sulla funzione  $V(x)$ :

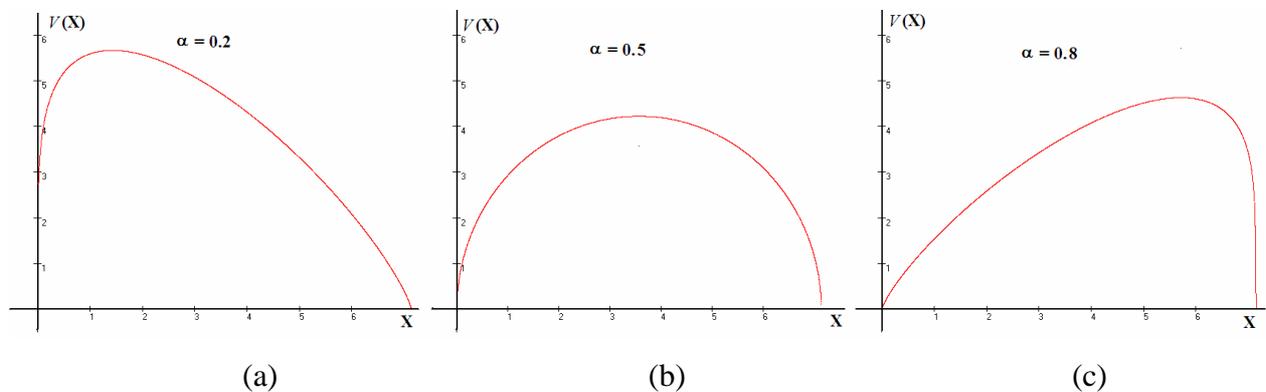


Figura 2

Nella figura 2 per i tre valori di  $\alpha$  le caratteristiche generali della funzione  $V(x)$  sono mantenute nei tre casi; si può notare che nei due casi estremi ( $a$  e  $c$ ), caratterizzati da un coefficiente di preferenza particolarmente favorevole ad uno dei due beni, i due rami che compongono i grafici della funzione sono, qualitativamente, più ripidi rispetto al caso intermedio ( $b$ ) con preferenze più equilibrate. Quando la preferenza per il bene  $x$  è relativamente bassa (caso  $a$ ), a partire dall'origine, il grafico della funzione  $V(x)$  cresce velocemente perché il consumo del bene  $x$  è ai suoi livelli iniziali e raggiunge immediatamente il suo massimo perché, data la bassa preferenza per il bene  $x$ , il consumatore raggiunge subito il livello di *saturazione* relativamente al bene  $x$ . Al contrario, quando la preferenza per il bene  $x$  è relativamente alta (caso  $c$ ), il grafico della funzione raggiunge lentamente il suo massimo per poi decrescere velocemente perché il livello di

saturazione relativamente al consumo del bene  $x$  è raggiunto per alti livelli di  $x$  e per livelli di consumo dell'altro bene ancora bassi.

Da un punto di vista della capacità informativa, ipotizziamo che in ogni periodo di tempo  $t$ , l'agente, grazie all'*esperienza di consumo corrente*, è in grado di valutare correttamente l'eventuale effetto di un incremento relativamente piccolo nel consumo del bene  $x$  (e quindi una corrispondente diminuzione nel consumo del bene  $y$ ) sulla sua utilità; ovvero è in grado di valutare le conseguenze, in termini di utilità, di un eventuale passaggio ad un paniere che contiene una maggiore quantità del bene  $x$  ed una minore quantità del bene  $y$ . Questa ipotesi conoscitiva, da un punto di vista analitico, implica che l'agente in ogni periodo di tempo  $t$  abbia una conoscenza *locale* (relativamente all'intorno del punto che rappresenta il consumo corrente:  $x_t$ ) della derivata della funzione  $V(x)$ .

A partire da questa minimale ipotesi conoscitiva, possiamo delineare il seguente meccanismo decisionale rispetto alle scelte di consumo: in ogni periodo di tempo  $t$ , se l'esperienza di consumo corrente indica un aumento (diminuzione) dell'utilità nell'eventuale passaggio ad un paniere con una maggiore quantità del bene  $x$  ed una minore quantità del bene  $y$ , allora il consumo del bene  $x$  nel periodo successivo  $t+1$  aumenterà (diminuirà),  $x_{t+1} > (<)x_t$ , e l'intensità di tale cambiamento nel paniere di consumo è direttamente proporzionale alla variazione di utilità prevista localmente dal consumatore con l'esperienza di consumo e ad un fattore soggettivo di reattività. Con un tale meccanismo decisionale, in ogni periodo  $t$  i panieri consumati rispettano il vincolo di bilancio ma non necessariamente la condizione per l'ottimo. Inoltre si può osservare che, nel caso di preferenze Cobb-Douglas, l'intensità della variazione dell'utilità derivante dal consumo dei due beni è più forte quando le preferenze sono sbilanciate a favore di uno dei due beni.

### 3. Dinamica

Una possibile specificazione analitica del meccanismo decisionale precedentemente descritto, coinvolgendo la variabile  $x$  in periodi di tempo differenti, ci consente anche di rendere dinamico il modello. Nel caso di una evoluzione nel tempo di tipo discreto, se al tempo  $t$  il consumatore ha scelto una quantità del bene  $x$  pari a  $x_t$ , la dinamica del processo decisionale analizzato può essere descritta dalla seguente equazione alle differenze del primo ordine:

$$x_{t+1} = f(x_t) = x_t + \gamma W'(x_t) \quad (1)$$

dove il parametro  $\gamma > 0$  esprime la velocità o reattività soggettiva del consumatore rispetto alle eventuali variazioni di utilità nell'intorno del punto che rappresenta il consumo corrente. In modo analogo, possiamo definire la dinamica decisionale nel tempo continuo con la seguente equazione differenziale del primo ordine, anch'essa generalmente non-lineare:

$$\dot{x} = g(x) = \gamma W'(x) \quad (2)$$

La condizione di stazionarietà sia nel caso discreto ( $p_{t+1} = p_t = p^*$ ) che nel caso continuo ( $\dot{x} = 0$ ) dà luogo al paniere ottimale  $(x^*, y^*) = (\alpha \frac{m}{p}, (1 - \alpha)m)$ ; quindi, come nel modello di D'Orlando e Rodano, se il processo adattivo di revisione del paniere di consumo converge, allora non può che convergere alla *scelta razionale* prevista dalla teoria canonica. Nell'analisi dinamica occorre indagare le condizioni economiche che determinano l'emergere della scelta razionale nel lungo periodo ed anche, nel caso discreto, l'emergere di andamenti asintotici regimi di altra natura (cicli periodici, dinamiche caotiche, etc.).

### 3.1 Dinamica in Tempo Continuo

La prima proposizione mostra come l'evoluzione in tempo continuo fornisce un forte fondamento adattivo e dinamico alla adozione dell'ipotesi di razionalità nella modellistica economica; infatti, in questo contesto, è facilmente dimostrabile una proprietà di *stabilità globale* della scelta razionale:

**Proposizione 1.** *Per ogni paniere iniziale caratterizzato da un consumo  $x(0) > 0$ , le traiettorie generate dall'equazione differenziale (2) convergono alla scelta razionale  $x^* = \alpha m/p$ .*

**Dimostrazione.** *Semplicemente, perché il secondo membro dell'equazione differenziale (2) è dappertutto decrescente,  $\partial \dot{x} / \partial x = \gamma V''(x) < 0$ , e interseca l'ascissa nel punto di scelta razionale; condizioni iniziali  $x(0) < x^* = \alpha m/p$  generano orbite crescenti e convergenti verso  $x^*$  e viceversa condizioni iniziali  $x(0) > x^* = \alpha m/p$  generano orbite decrescenti e convergenti verso  $x^*$ .*

La figura 3 mostra i grafici di  $V(x)$ , di  $V'(x)$  e il diagramma di fase del caso continuo: l'equazione differenziale è positiva sino a quando le variazioni nell'utilità sollecitano incrementi positivi nel consumo del bene  $x$  ed è negativa sino a quando le variazioni nell'utilità sollecitano incrementi negativi nel consumo del bene; e si annulla nella scelta razionale, quando la variazione nulla nell'utilità sollecita un consumo stazionario.

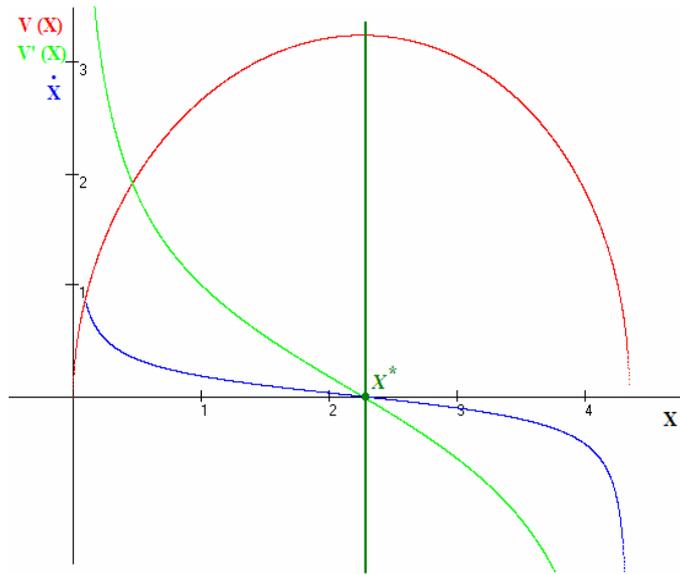


Figura 3

Concludendo l'analisi relativa al caso continuo possiamo osservare che *con l'aggiustamento istantaneo del paniere di consumo, asintoticamente, si ha l'emergere della scelta razionale.*

### 3.2 Dinamica in Tempo Discreto

Crediamo che l'analisi del processo decisionale in tempo discreto sia necessaria non solo per motivi di completezza ma anche per motivi sostanziali: il meccanismo di scelta che proponiamo sottolinea il ruolo che l'esperienza di consumo ha per l'agente al fine di elaborare informazioni circa le proprie preferenze e di avviare, all'inizio di ogni periodo di tempo successivo, un nuovo processo decisionale; e quindi, risulta più adeguata, da questo punto di vista, la collocazione del modello in una evoluzione temporale di tipo discreto. La mappa (1) esplicitata diventa:

$$x_{t+1} = f(x_t) = x_t + \gamma \left[ \alpha x_t^{\alpha-1} (m - px_t)^{1-\alpha} - (1-\alpha) px_t^\alpha (m - px_t)^{-\alpha} \right] \quad (3)$$

Come sappiamo,  $f(x_t)$  ha come unico punto stazionario la scelta razionale. Le proprietà dinamiche, nel senso di analisi di stabilità e possibili biforcazioni, di tale punto dipendono dai parametri del modello.

**Proposizione 2.** *La condizione per la stabilità locale del punto stazionario  $x^*$  della mappa dinamica (3) è:*

$$\frac{\gamma p^{2-\alpha}}{\alpha^{1-\alpha} (1-\alpha)^\alpha m} < 2 \quad (4)$$

**Dimostrazione.** *Si ottiene facilmente la derivata della funzione  $f(x)$  valutata nello stato stazionario:*

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x^*=\alpha m / p} = 1 - \frac{\gamma p^{2-\alpha}}{m \alpha^{1-\alpha} (1-\alpha)^\alpha}.$$

*È possibile notare che nel punto stazionario l'inclinazione della mappa non supera mai l'unità e quindi la condizione di stabilità locale si riduce alla (4).*

La condizione di stabilità (4) ha una forte somiglianza con la corrispondente condizione del modello di D'Orlando-Rodano (2006), infatti, qualitativamente, l'analisi di stabilità conferma il ruolo di quasi tutti i parametri per la stabilizzazione o la destabilizzazione del sistema: incrementi nel prezzo e nel coefficiente di reazione tendono a essere destabilizzanti, incrementi nel reddito tendono a essere stabilizzanti, mentre il ruolo del parametro che descrive la preferenza per il bene  $x$ ,  $\alpha$ , non è univoco. Due possibili casi di dinamica convergente sono presentati nella figura 4a,b: nel primo caso la convergenza è di tipo monotono mentre nel secondo è di tipo oscillatorio; nelle due figure i punti segnati sulla funzione  $V(x)$  indicano i livelli di utilità conseguiti in corrispondenza dei valori  $x_t$  originati da un'orbita ad iniziare da un valore iniziale  $x_0$ . Fissati i due parametri che definiscono l'ambiente in cui agisce il consumatore, reddito e prezzo del bene,

la dinamica del sistema dipende unicamente dai parametri che caratterizzano il processo decisionale, la reattività ( $\gamma$ ) e la preferenza ( $\alpha$ ): nell'esempio numerico della figura 4a,b il valore dei parametri è:  $\alpha = 0.4705, \gamma = 0.9$  per la figura 4a e  $\alpha = 0.7106, \gamma = 1.29$  per la figura 4b e sono tali da determinare, di periodo in periodo, variazioni di  $x$  convergenti alla scelta razionale.

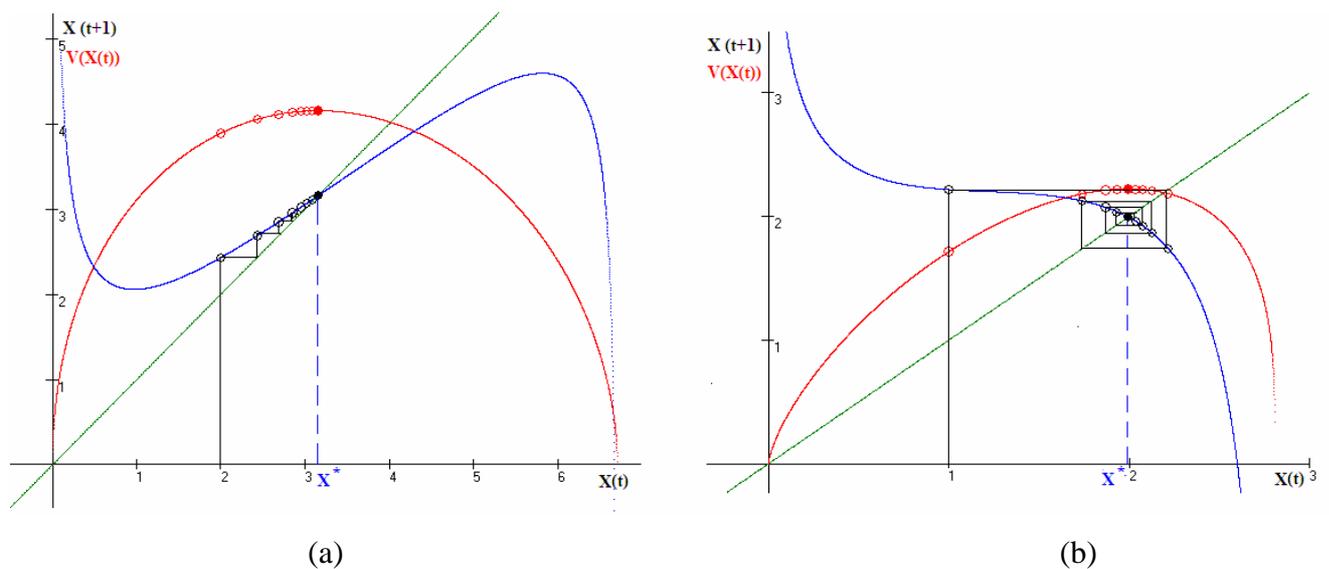


Figura 4

La violazione della condizione di stabilità (4) determina il passaggio alla instabilità del punto fisso tramite una biforcazione Flip (ovvero con raddoppio di periodo) e quindi con la nascita di un ciclo di periodo due. La figura 5 è costruita assumendo  $\alpha = 0.7802, \gamma = 1.613, m = 10$  e  $p = 3.335$ . In questo caso la “curvatura” dei due rami del grafico della funzione  $V(x)$  è sufficientemente ripida per avere forti variazioni della quantità consumata che impediscono la convergenza all'equilibrio.

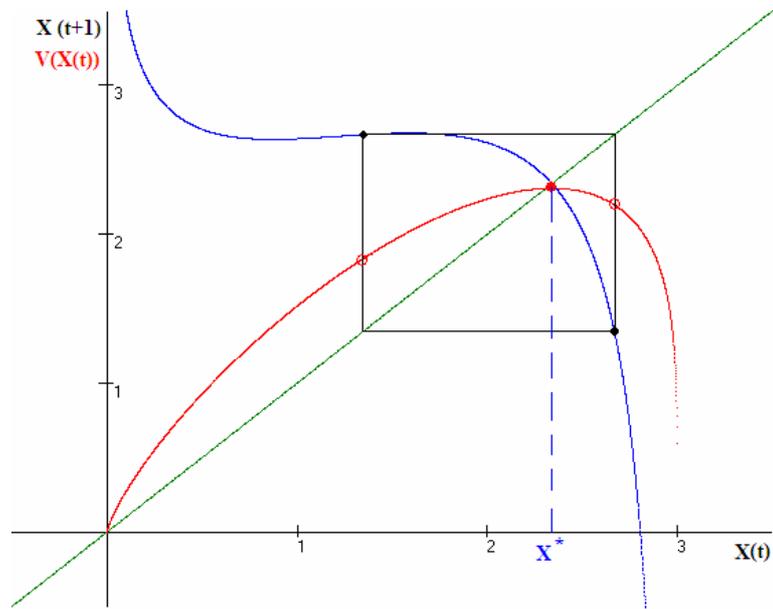


Figura 5

Ulteriori variazioni destabilizzanti dei due parametri decisionali,  $\alpha$  e  $\gamma$ , producono una sequenza di biforcazioni con raddoppio di periodo che culmina in un scenario caratterizzato da dinamiche caotiche.

La figura 6 rappresenta un diagramma di biforcazione nel quale è rappresentata la natura dell'insieme attrattivo al variare del parametro  $\alpha$ , fissati tutti gli altri parametri; è possibile notare come il sistema sia stabile per valori intermedi del parametro mentre la dinamiche più ricche si hanno per i valori estremi dell'intervallo unitario. Come abbiamo precedentemente notato, valori estremi di  $\alpha$  determinano una curvatura più ripida del grafico della funzione  $V(x)$  e quindi variazioni, nel tempo, più intense nel consumo del bene  $x$ .

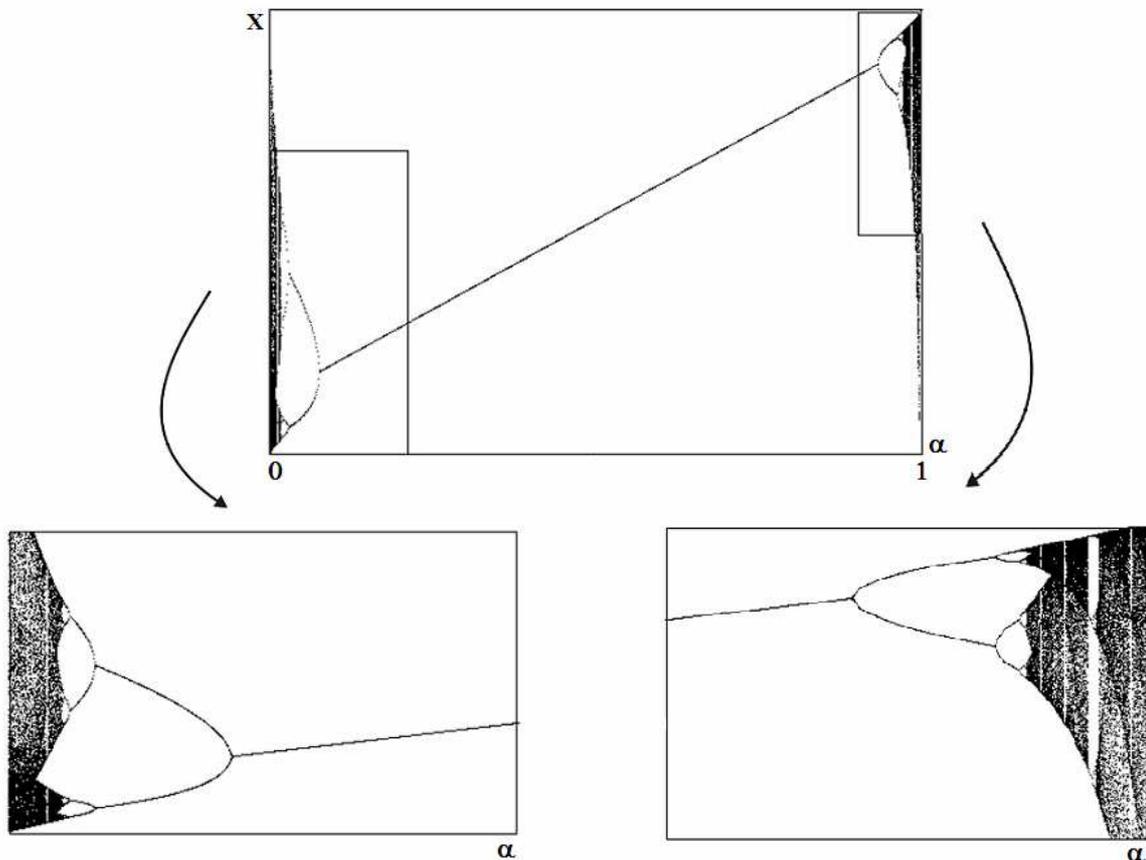


Figura 6

#### 4.1 Modello bidimensionale: analisi locale

Un'interessante estensione del modello consiste nel rendere endogene le preferenze. Sembra ragionevole supporre che le preferenze si modifichino nel tempo in base all'esperienza di consumo passata: il consumo di ieri provoca un cambiamento nelle preferenze di oggi relativamente al bene in questione.

Considerando come avviene il cambiamento delle preferenze ipotizzato, è preferibile estendere il modello al tempo discreto, visto che quello a tempo continuo comporta decisioni ed eventualmente cambiamenti di preferenze istantanei.

Rendere endogene le preferenze significa rendere l'esponente della funzione di utilità Cobb-Douglas una funzione della quantità di bene acquistata (e consumata) nel periodo precedente, in

particolare seguiremo le indicazioni di Rodano e D'Orlando dando alla funzione una specificazione di tipo sigmoideale, utilizzando quella che D'Orlando e Rodano chiamano “funzione logistica”. Questo tipo di specificazione è adatto alla descrizione di una situazione in cui la preferenza per il bene da parte del consumatore (espressa dal parametro  $\alpha$ ) dipende positivamente dalla quantità di bene consumata nel periodo precedente. In pratica, alti livelli di consumo in un determinato periodo portano il consumatore ad avere un alto gradimento per il bene nel periodo successivo: il consumo stimola il gradimento del bene e si genera abitudine (o addirittura dipendenza) al bene.

A questo punto il sistema dinamico è rappresentato dal sistema dinamico bidimensionale, descritto dalla mappa  $T$ :

$$T \begin{cases} x_{t+1} = x_t + \gamma \left[ \alpha_t x_t^{\alpha_t - 1} (m - px_t)^{1 - \alpha_t} + x_t^{\alpha_t} (1 - \alpha_t) (-p) (m - px_t)^{-\alpha_t} \right] \\ \alpha_{t+1} = \frac{1}{k_1 + k_2 k_3^{x_t}} \end{cases}$$

con  $k_1 > 1$ ,  $k_2 > 0$  e  $0 < k_3 < 1$  (queste limitazioni dei parametri sono dovute al fatto che per avere valori ammissibili di  $x_t$  è necessario che  $0 < \alpha_t < 1$ ).

Dalle condizioni di punto fisso  $x_{t+1} = x_t = x^*$  e  $\alpha_{t+1} = \alpha_t = \alpha^*$ , si ottiene:

$$\begin{cases} x^* = x^* + \gamma \left[ \alpha^* (x^*)^{\alpha^* - 1} (m - px^*)^{1 - \alpha^*} + (x^*)^{\alpha^*} (1 - \alpha^*) (-p) (m - px^*)^{-\alpha^*} \right] \\ \alpha^* = \frac{1}{k_1 + k_2 k_3^{x^*}} \end{cases}$$

e risolvendo per  $\alpha^*$  si ha:

$$\begin{cases} \alpha^* = x^* \frac{p}{m} & (5) \\ \alpha^* = \frac{1}{k_1 + k_2 k_3^{x^*}} & (6) \end{cases}$$

Si può notare che il parametro  $\gamma$  non compare nelle condizioni di punto fisso, quindi non ha alcuna rilevanza nel determinare il numero e la posizione dei punti stazionari. La (5) rappresenta l'equazione di una retta passante per l'origine e pendenza positiva pari a  $\frac{p}{m}$ . La retta (5) individua tutte le coppie di  $\alpha$  e  $x$  tali da massimizzare l'utilità del consumatore: per ogni livello di  $\alpha$ , la quantità di bene che massimizza l'utilità del consumatore è quella individuata dalla retta (5). Occorre sottolineare che ai punti della retta (5), tutte le possibili scelte razionali, corrispondono, in genere, diversi livelli di utilità. La (6) è l'equazione logistica usata per rappresentare l'evoluzione delle preferenze del consumatore: dato il consumo del bene in un periodo, la (6) permette di determinare la preferenza per il bene nel periodo successivo; specularmente, data la preferenza per il bene in questione in un determinato periodo, la curva (6) identifica univocamente la quantità di bene consumata nel periodo precedente.

Le due equazioni sono le stesse trovate da Bischi e Tramontana (2007), lavoro nel quale è dimostrata la seguente proposizione:

**Proposizione 3** *condizioni necessarie per la presenza contemporanea di tre punti di equilibrio, cioè punti di intersezione tra la retta (4) e la curva (5), sono :*

$$\frac{m}{p} > -4 \frac{k_1}{\ln k_3} \quad \text{e} \quad k_2^{\min} < k_2 < k_2^{\max} \quad (7)$$

(la dimostrazione e i valori espliciti di  $k_2^{\min}$  e  $k_2^{\max}$  sono riportati nell'Appendice A).

Se le condizioni (7) sono entrambe verificate esistono tre punti di equilibrio (figura 7a) altrimenti ne esiste solo uno (figura 7b). Nei casi limite in cui una delle due disuguaglianze nella seconda condizione della (7) diventa un'uguaglianza, avremo una tangenza fra le curve e due dei tre punti fissi si uniscono in uno solo (figura 7c).

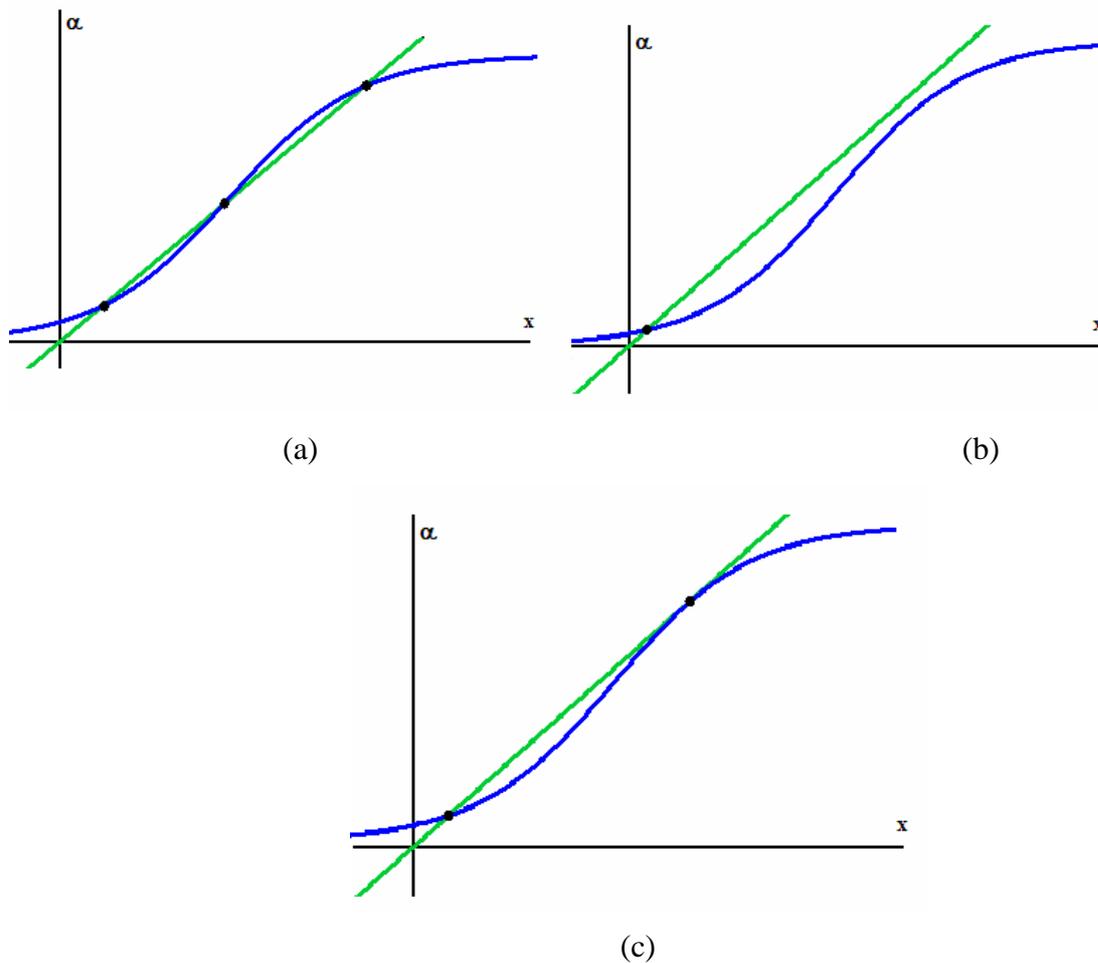


Figura 7

Se si ha convergenza ad un punto fisso significa che il consumatore, seppur privo di perfetta razionalità, converge verso una scelta di consumo propria di un consumatore razionale, infatti tutti i punti fissi appartengono alla retta (5) la cui equazione identifica le scelte di un consumatore razionale in funzione delle proprie preferenze. Al fine di vedere se e sotto quali condizioni il consumatore converge alla scelta razionale, occorre innanzitutto un'analisi di stabilità locale dei punti fissi.

La particolare forma delle equazioni (5) e (6) impedisce di ottenere un'espressione analitica per i punti fissi (uno o tre che siano) e di conseguenza di verificare algebricamente quando gli autovalori della matrice Jacobiana calcolata nei punti fissi, superano in valore assoluto l'unità.

Ripetute analisi numeriche ci permettono di congetturare che quando i punti fissi sono tre, quello centrale è sempre instabile, infatti il meccanismo attraverso cui si passa da uno a tre punti fissi è quello tipico della biforcazione sella-nodo e la teoria (si veda ad es. Guckenheimer e Holmes, 1983) ci dice che avvenuta la biforcazione (il passaggio dalla figura 7c alla figura 7b) almeno uno dei due punti creati sarà senz'altro instabile e nel nostro caso questo sembra essere sempre il punto fisso centrale.

Possiamo invece dimostrare che non troveremo mai una curva invariante attorno a un punto fisso in seguito ad una biforcazione di tipo Neimark-Sacker, infatti:

**Proposizione 4** *la matrice Jacobiana calcolata nei punti fissi non ha mai autovalori complessi e coniugati*

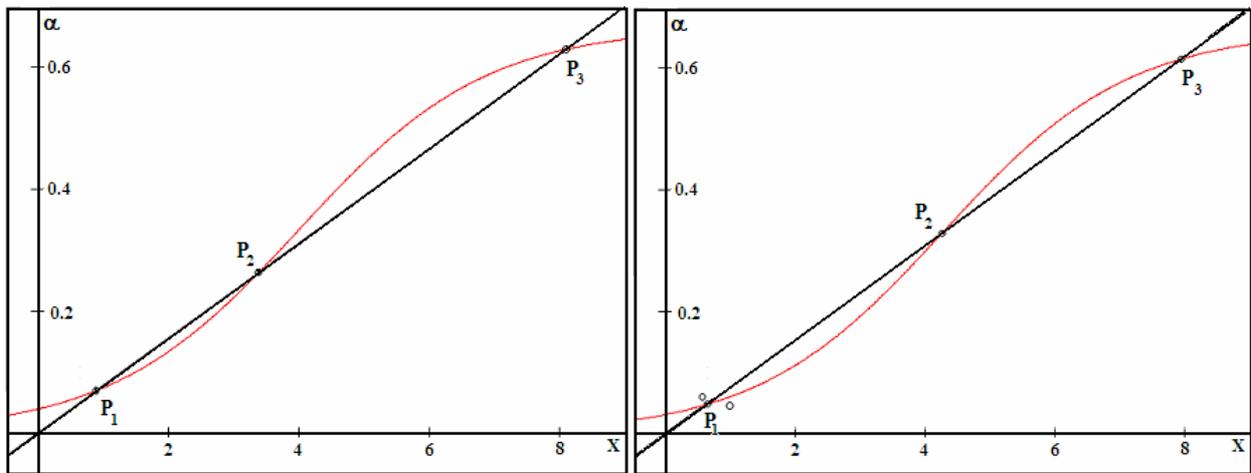
(la dimostrazione è riportata nell'Appendice B).

Quanto appena affermato non implica che i due punti fissi più esterni siano sempre stabili, è infatti possibile che perdano la loro stabilità attraverso una biforcazione flip, creando un ciclo periodico che rappresenterebbe una situazione in cui il consumatore non è in grado di raggiungere la scelta propria del consumatore perfettamente razionale.

Metodi numerici rivelano che questa eventualità si verifica per larghi intervalli di valori dei parametri. La figura 8a mostra una situazione in cui coesistono tre punti fissi due dei quali, quelli esterni  $P_1$  e  $P_3$ , sono stabili. Il set di parametri usato è:  $m = 18$ ,  $p = 1.4$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $k_1 = 1.5$ ,  $k_2 = 24$ ,  $k_3 = 0.5$ .

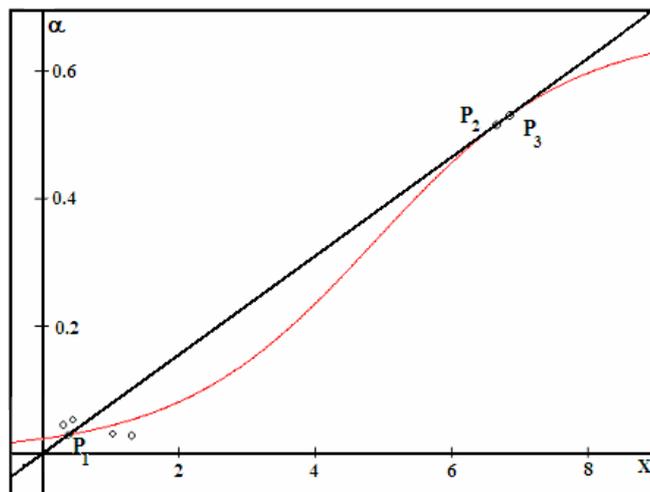
Aumentando il valore del parametro  $k_2$  il punto fisso  $P_1$  perde stabilità tramite una biforcazione flip, creando un ciclo-2 localmente attrattivo, come è possibile osservare in figura 8b in cui  $k_2 = 29.042$ .

Se si continua ad incrementare il valore di  $k_2$  assistiamo ad un'altra biforcazione flip con raddoppio del periodo che porta alla creazione di un ciclo-4 localmente attrattivo (figura 8c) dove  $k_2 = 43.513$ ).



(a)

(b)



(c)

Figura 8

Quando il sistema converge ad un ciclo periodico significa che il consumatore non *impara* mai ad essere razionale e alternerà nel corso dei periodi scelte di consumo sub-ottimali, poiché i punti del ciclo non si trovano sulla retta (5) e quindi non sono un punto di massimo della funzione di utilità.

Un'altra conseguenza è il fatto che nemmeno le preferenze del consumatore si stabilizzano poiché i punti del ciclo hanno tutti un diverso valore di  $\alpha$  a cui corrisponde una diversa forma della

funzione di utilità; così da un periodo all'altro, il consumatore si trova con preferenze rappresentate da differenti funzioni di utilità che si ripetono ciclicamente e le quantità consumate non si collocano mai nei punti di massimo di queste funzioni, altrimenti si sarebbe raggiunto un punto fisso con conseguente arresto della dinamica.

Le figure 9a,b mostrano rispettivamente le funzioni di utilità corrispondenti al ciclo-2 di figura 8b e al ciclo-4 di figura 8c.

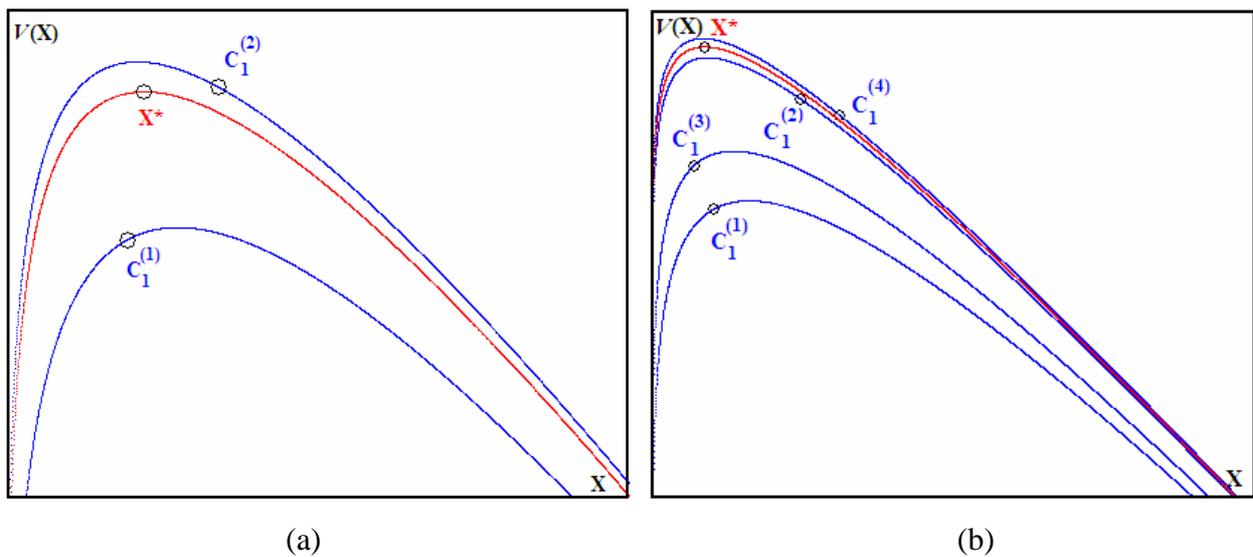


Figura 9

La figura 9a mostra come il comportamento del consumatore sia tale da “rimbalzare” dal ramo crescente di una funzione di utilità ( $C_1^{(1)}$ ) al ramo decrescente di un'altra ( $C_1^{(2)}$ ) senza mai raggiungere la funzione  $V(x)$  corrispondente al punto fisso che vediamo rappresentata tra le due. È opportuno notare come il ramo crescente delle funzioni  $V(x)$  sia molto ripido, spingendo così il consumatore, la cui scelta ricada in questo ramo, ad un aumento della quantità acquistata del bene eccessivo, ricadendo nel ramo decrescente di un'altra funzione  $V(x)$ , relativamente lontano dalla scelta ottimale. Questo comporta che, nonostante la minor ripidità del ramo decrescente, la sua maggior lontananza dal punto di massimo spinga il consumatore a diminuire troppo la quantità acquistata del bene nel periodo successivo, ritornando nello stesso punto della stessa funzione  $V(x)$  di due periodi prima, e ricominciando il ciclo.

Una situazione analoga, ma con un periodo doppio (ciclo 4), avviene nella figura 9b. La particolare forma delle funzioni  $V(x)$  corrisponde solo alla porzione di piano dove si trova il primo dei tre equilibri coesistenti, quello con valori più bassi di  $\alpha$  e  $X$ .

La figura 10 mostra la funzione  $V(x)$  dalle pendenze più “dolci” in un intorno di  $P_3$ .

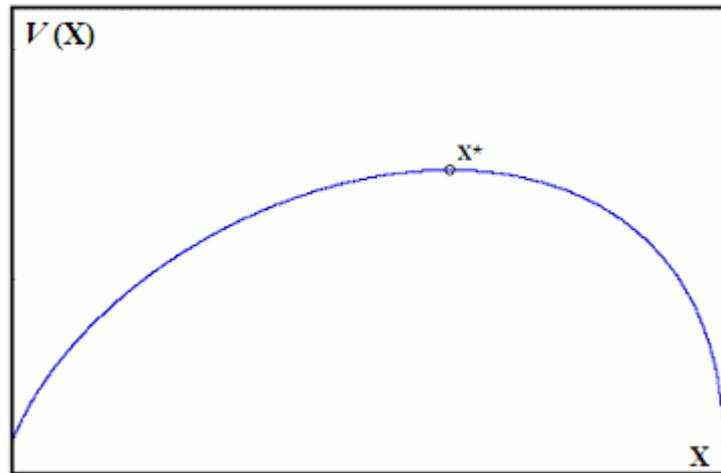


Figura 10

La spiegazione economica della forma della funzione  $V(x)$  rappresentata nella figura 10 e di quelle rappresentate nelle figure 9a,b è questa: in un intorno del primo punto fisso ( $P_1$ ), il valore di  $\alpha$  è basso, quindi ci troviamo in una situazione in cui il bene in questione non ha un grande peso nella funzione di utilità e il consumatore la cui scelta ricade nel ramo crescente della funzione  $V(x)$ , consuma talmente poco del bene in questione che assume grande importanza l'effetto “scarsità” e l'utilità marginale è comunque molto elevata. In pratica è sufficiente un piccolo aumento del consumo del bene per raggiungere il massimo livello di utilità corrispondente ad una bassa preferenza per il bene  $x$ . Nelle figure 9a,b il punto fisso  $P_1$  ha perso la sua stabilità e c'è stata la nascita di cicli periodici. In questi casi il valore della pendenza di  $V(x)$  nei due rami è tale da far sì che il consumatore non converga alla scelta razionale, perché si instaura quel processo di “rimbalzo” dal ramo crescente a quello decrescente di due o quattro diverse funzioni  $V(x)$  (rispettivamente il caso di figura 9a e di figura 9b) dovuto al fatto che sui punti dei cicli situati sui rami crescenti, il bene è consumato in misura talmente limitata da far sì

che la pendenza di  $V(x)$  sia elevata e porti così il consumatore ad aumentare troppo il suo consumo per il periodo successivo, trovandosi su un ramo decrescente di un'altra  $V(x)$  corrispondente ad un più elevato valore di  $\alpha$ . Nel periodo successivo il maggior consumo di  $x$  porta ad un minor peso dell'effetto "scarsità" ma contestualmente la maggior preferenza rispetto al periodo precedente per il bene in questione è tale da condurre il consumatore a ridurre eccessivamente il consumo del bene, tornando su un ramo crescente di  $V(x)$  (nel caso della figura 9a si troverà esattamente nella stessa posizione della stessa  $V(x)$  di due periodi prima). Lo stesso meccanismo non interviene in prossimità del terzo punto fisso ( $P_3$ ) dove il bene in questione ha molto peso nella funzione di utilità ma è anche alto il suo livello di consumo e si evitano comportamenti esagerati del consumatore che gli impediscono di convergere a un comportamento massimizzante.

Questa osservazione è confermata dalle simulazioni che mostrano come  $P_3$  (quando esistono tre punti fissi) o l'unico punto fisso (quando questo è situato a destra del punto di flesso della logistica, quindi in alto nel grafico) non perdano mai stabilità.

## **4.2 Modello bidimensionale: livello di utilità e stabilità dei punti stazionari**

Una domanda che è lecito porsi quando si ha la coesistenza fra più punti fissi stabili, è quale degli equilibri raggiungibili fornirebbe un maggior livello di utilità al consumatore. Infatti, il fatto che siano due i possibili esiti asintotici (diversi dalla divergenza) per quanto riguarda le scelte del consumatore, non implica che le due situazioni siano per lui indifferenti.

Occorre innanzitutto notare che i punti fissi si differenziano per differenti livelli sia di consumo che di preferenze per i beni. Riprendiamo allora la funzione ausiliaria  $V(x)$  e consideriamone una versione in cui  $\alpha$  non è un parametro ma una variabile:

$$W(x, \alpha) = x^\alpha (m - px)^{1-\alpha} \quad (8)$$

La funzione  $W(x, \alpha)$  definisce l'utilità in termini del bene  $x$  e della preferenza  $\alpha$ . Nella figura 11 si osserva l'andamento di  $W(x, \alpha)$  nel caso specifico in cui i valori dei parametri  $m$  e  $p$  sono quelli già usati per ottenere la figura 8a.

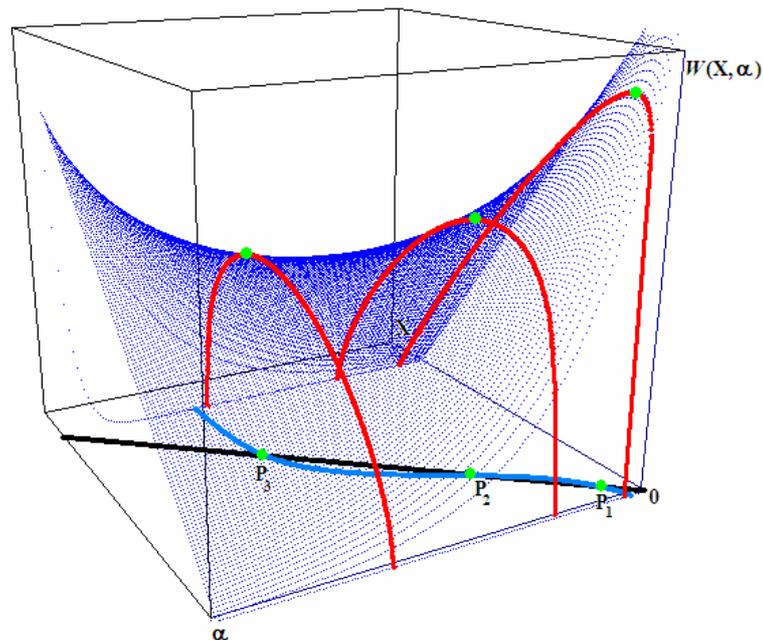


Figura 11

La figura mostra chiaramente come la convergenza verso il punto fisso  $P_1$  consentirebbe al consumatore di ottenere un livello di utilità superiore al caso in cui la convergenza sia verso  $P_3$ . Le curve rosse sono delle sezioni del piano corrispondenti a valori costanti di  $\alpha$  e rappresentano tutte le combinazioni di  $X$  e  $V(X)$  per i tre livelli di  $\alpha$  relativi a tre punti fissi, e si può notare che i tre punti rappresentano tutti delle scelte massimizzanti (ad esempio, dato il valore di  $\alpha$  corrispondente al punto  $P_3$ , la scelta di consumo razionale consiste nel consumare la quantità di bene del punto stesso).

La funzione  $W(x, \alpha)$  è definita per qualsiasi valore di  $\alpha$  e per tutte le  $x$  positive. Dato che ci interessa confrontare le utilità corrispondenti ai punti fissi, possiamo restringere il campo a tutte le combinazioni di  $x$  e  $\alpha$  che rappresentano delle scelte razionali per il consumatore, cioè tutte

quelle che soddisfano la (5). Se sostituiamo la (5) nella (8) otteniamo la cosiddetta *funzione di utilità indiretta*, che a noi interessa osservare al variare di  $\alpha$  :

$$Z(\alpha) = \left(\frac{\alpha m}{p}\right)^\alpha [m(1-\alpha)]^{1-\alpha} \quad (9)$$

Se sostituiamo nella (9) i valori di  $\alpha$  corrispondenti ai tre punti fissi, otteniamo i tre livelli di utilità corrispondenti.

Al fine di scoprire se ci sono delle regolarità nell'ordinamento dei punti fissi in base al livello di utilità raggiunto, occorre analizzare l'andamento di  $Z(\alpha)$  al variare della preferenza  $\alpha$  , in pratica calcoliamo la derivata:

$$Z'(\alpha) = \left(\frac{\alpha m}{p}\right)^\alpha [m(1-\alpha)]^{1-\alpha} \left[ \ln\left(\frac{\alpha m}{p}\right) - \ln(m - m\alpha) \right] = Z(\alpha) \left[ \ln\left(\frac{\alpha}{p(1-\alpha)}\right) \right] \quad (10)$$

La (10) mostra che il segno della derivata dipende solo dal termine nella seconda parentesi quadra, visto che tutti gli altri sono sempre positivi, ed in particolare si ricava:

$$\begin{cases} Z'(\alpha) > 0 & \Leftrightarrow & \alpha > \frac{p}{1+p} \\ Z'(\alpha) < 0 & \Leftrightarrow & \alpha < \frac{p}{1+p} \\ Z'(\alpha) = 0 & \Leftrightarrow & \alpha = \frac{p}{1+p} \end{cases} \quad (11)$$

La (11) consente subito di notare come, nel caso particolare in cui i prezzi dei due beni coincidono ( $p=1$ ), il punto di minimo si ha in corrispondenza di un valore di  $\alpha$  pari a 0.5. Questo significa che a parità di prezzo fra i due beni, il consumatore razionale che raggiunge un livello di utilità più basso è quello che non ha una preferenza particolare per uno dei due beni, ma sono per lui in tutto e per tutto equivalenti.

A parte questa osservazione che contribuisce a spiegare le diverse altezze delle tre  $V(X)$  di figura 2, sappiamo che in situazioni di coesistenza di tre punti fissi, i punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  hanno valori crescenti di quantità consumata  $x$  e di preferenze  $\alpha$ , e quindi un ordinamento in base al livello di utilità ottenibile delle tre situazioni sarebbe immediato se si trovassero tutti nello stesso ramo crescente (o decrescente) di  $Z(\alpha)$ , poiché in questo caso avremmo di certo che l'utilità di  $P_3$  è superiore a quella di  $P_2$  che è superiore a quella di  $P_1$  (il contrario nel caso in cui il ramo in cui punti sono situati sia decrescente).

Sapendo che i valori economicamente rilevanti di  $\alpha$  variano tra 0 e 1, sappiamo anche dalla (11) che il punto di minimo di  $Z(\alpha)$  sarà sempre interno all'intervallo dei valori che  $\alpha$  può assumere, quindi in questo intervallo avremo sempre un ramo decrescente e uno crescente di  $Z(\alpha)$ . Questo impedisce di essere certi in partenza di quale sarà l'ordinamento tra i tre punti fissi. Graficamente  $Z(\alpha)$  rappresenta l'intersezione tra  $W(x, \alpha)$  e il piano perpendicolare al piano  $(x, \alpha)$  e che lo interseca in corrispondenza delle combinazioni ottime di  $x$  e  $\alpha$ . Le figure 12a,b mostrano due possibili situazioni:

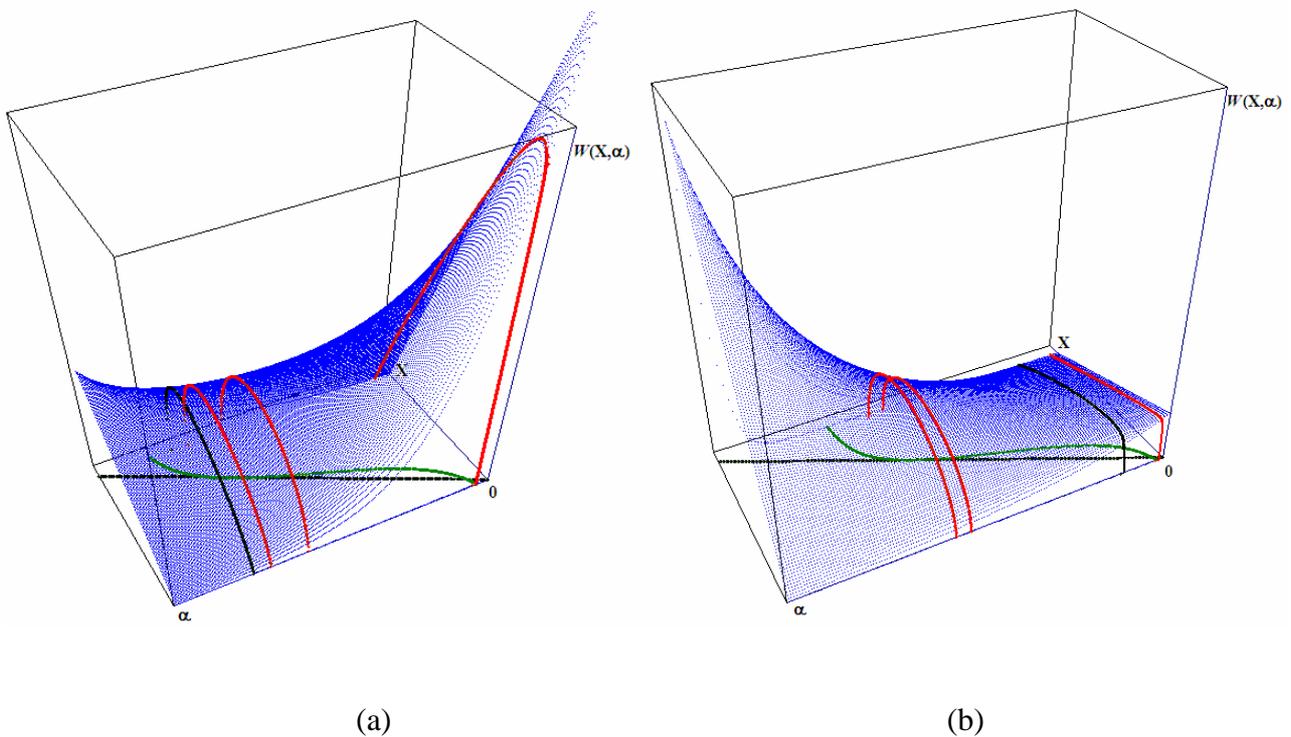


Figura 12

La figura 12a è ottenuta con il seguente set di parametri:  $m = 18$ ,  $p = 3.29$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $k_1 = 1.157$ ,  $k_2 = 14,571$ ,  $k_3 = 0.307$  e mostra una situazione in cui i tre punti fissi si trovano nel ramo decrescente di  $Z(\alpha)$  (la curva nera ha il massimo corrispondente al più basso livello di utilità che si può ottenere con una scelta razionale, quindi la coordinata  $\alpha$  di questo punto sarà  $\frac{p}{1+p}$ ) e non c'è dubbio che sia  $P_1$  il punto a cui corrisponde un più alto livello di utilità. La figura 12b è invece ottenuta con il seguente set di parametri:  $m = 1.1$ ,  $p = 0.149$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $k_1 = 1.404$ ,  $k_2 = 50$ ,  $k_3 = 0.307$  e mostra una situazione in cui i punti fissi non sono tutti nello stesso ramo di  $Z(\alpha)$ , quindi non è certo l'ordinamento e occorre effettivamente confrontare i tre livelli di utilità, che nel caso della figura 12b sono tali da rendere il punto  $P_3$  preferibile.

Abbiamo così mostrato che è possibile avere sia situazioni in cui  $P_1$  è il punto fisso a cui corrisponde un più alto livello di utilità, sia situazioni in cui il punto fisso a cui corrisponde il maggior livello di utilità è  $P_3$ . Siamo però certi che:

**Proposizione 5.** *Per tutte le configurazioni dei parametri che danno luogo alla coesistenza di tre punti fissi per il sistema rappresentato dalle curve (5) e (6), il punto fisso a cui corrisponde un livello intermedio di  $\alpha$  (e di  $x$ ), cioè  $P_2$ , non sarà mai il punto con il più alto livello di utilità.*

**Prova.** *Se il valore di  $\alpha$  corrispondente a  $P_2$  si trova nel ramo decrescente di  $Z(\alpha)$ , allora di certo a  $P_1$  corrisponderà un più alto livello di utilità; se il valore di  $\alpha$  corrispondente a  $P_2$  si trova nel ramo crescente di  $Z(\alpha)$ , allora di certo a  $P_3$  corrisponderà un più alto livello di utilità; se infine il valore di  $\alpha$  corrispondente a  $P_2$  si trova esattamente in corrispondenza del punto di minimo di  $Z(\alpha)$ , allora certamente sia a  $P_1$  che a  $P_3$  corrisponderanno maggiori livelli di utilità.*

Queste osservazioni rendono importante un'analisi globale del modello, visto che non solo è possibile la convergenza a più di un attrattore, ma abbiamo appena mostrato che nel caso in cui gli attrattori siano punti fissi il consumatore raggiungerebbe diversi livelli di utilità a seconda

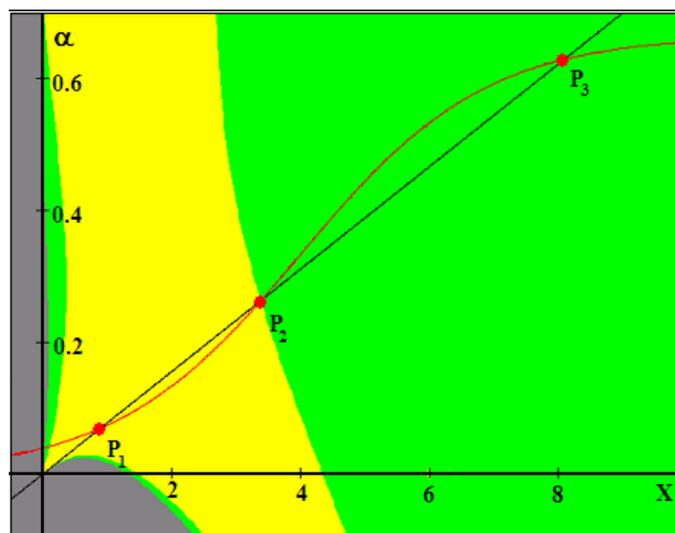
dell'equilibrio raggiunto nel lungo periodo, e allora diventa fondamentale sapere quali siano le condizioni iniziali che conducono alla convergenza verso uno o l'altro.

### 4.3 Modello bidimensionale: analisi globale

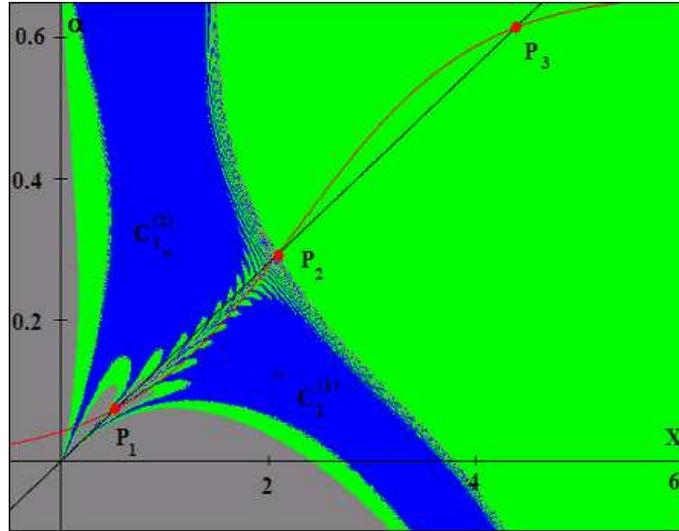
La possibile coesistenza di più attrattori vista nel paragrafo precedente rende indispensabile uno studio globale della mappa, infatti l'esito finale del comportamento del consumatore rappresentato dal sistema dinamico composto dalla (5) e dalla (6) diventa dipendente dalla situazione di partenza, ossia dal valore di  $\alpha$  e dalla quantità di bene  $X$  consumata nel periodo iniziale (*path dependence*).

In altre parole, la conseguenza della cosiddetta *path dependence* è che, anche se un attrattore (per esempio un punto fisso) è localmente stabile, non è certo che il sistema convergerà verso questo, perché coesiste con altri attrattori, e il piano potrà essere suddiviso in porzioni (*bacini di attrazione*) formati da tutte le condizioni iniziali che portano il consumatore a convergere verso un attrattore o l'altro.

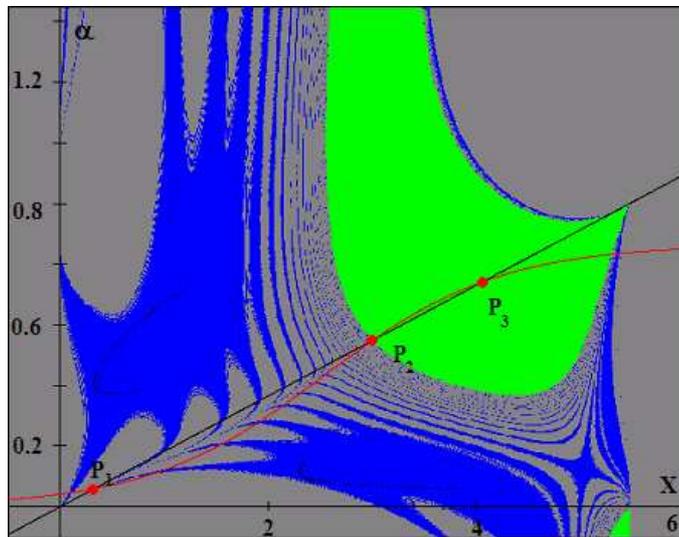
Le figure 13a,b,c mostrano tre esempi:



(a)



(b)



(c)

Figura 13

La figura 13a si riferisce al caso in cui i punti fissi  $P_1$  e  $P_3$  sono localmente stabili. Il set di parametri utilizzato è:  $m = 18$ ,  $p = 1.4$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $k_1 = 1.5$ ,  $k_2 = 24$ ,  $k_3 = 0.5$ . Il bacino di attrazione giallo rappresenta l'insieme delle condizioni iniziali partendo dalle quali il consumatore converge alla scelta razionale contrassegnata da  $P_1$ ; il bacino verde si riferisce invece alla scelta razionale  $P_3$ ; infine, il bacino grigio rappresenta condizioni che condurrebbero a traiettorie prive di significato economico come il consumo di quantità negative del bene e di quantità superiori a quanto la dotazione di reddito e i prezzi dei due beni consentano.

La figura 13b è ottenuta con il seguente set di parametri:  $m = 18$ ,  $p = 2.525$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $k_1 = 1.5$ ,  $k_2 = 22.555$ ,  $k_3 = 0.307$ . Il bacino di attrazione verde rappresenta l'insieme delle condizioni iniziali partendo dalle quali il consumatore converge alla scelta razionale, rappresentata dal punto fisso  $P_3$ ; il bacino blu è il bacino di attrazione di un ciclo-2 creatosi in seguito ad una biforcazione flip del punto fisso  $P_1$  che è divenuto così instabile; L'analisi globale ci permette quindi di affermare che partendo da scelte iniziali molto vicine fra loro, il consumatore può convergere verso un comportamento massimizzante in un caso o convergere verso il ciclo-2 nell'altro e quindi, in quest'ultimo caso, non compiere mai la scelta razionale: i bordi dei bacini diventano separatori tra le condizioni che conducono al comportamento massimizzante e le condizioni che conducono a scelte perennemente sub-ottimali.

La figura 13c è invece ottenuta utilizzando i seguenti valori dei parametri:  $m = 18$ ,  $p = 3.29$ ,  $\gamma = 0.9$ ,  $k_1 = 1.157$ ,  $k_2 = 23.054$ ,  $k_3 = 0.307$ . I colori dei bacini di attrazione hanno lo stesso significato visto per le figure precedenti, eccetto il fatto che ora il bacino blu rappresenta l'insieme delle condizioni iniziali che conducono il sistema verso un attrattore caotico creatosi come risultato di una "cascata" di biforcazioni flip seguite alla perdita di stabilità di  $P_1$ .

L'analisi globale non si limita però alla sola analisi numerica, infatti esistono delle tecniche che ci permettono di comprendere e spiegare le particolari configurazioni dei bacini di attrazione.

Le forme allungate dei bacini che escono dall'origine riscontrabili in entrambe le figure, sono comprensibili utilizzando le recenti tecniche e terminologie introdotte da Bischi et al. (1999, 2003, 2005), che ci permettono di riconoscere nell'origine un *focal point* e nelle particolari forme di bacini uscenti dall'origine dei *lobi*. Nella figura 13b si nota la presenza di un altro *focal point*

che è il punto in alto a destra dal quale “fuoriesce” il bacino verde. Questa struttura dei bacini è tipica delle mappe con denominatore.

Un'altra tecnica, come quella delle *linee critiche* introdotta da Gumowski e Mira (1980) e Mira et al. (1996), ci permette invece di spiegare la presenza di porzioni non connesse dei bacini di attrazione, ovvero porzioni separate dal cosiddetto “bacino immediato” che è quello contenente l'attrattore stesso. In entrambe le figure mostrate questo fenomeno si può notare, in particolare con riferimento al bacino verde. La spiegazione risiede nel diverso numero di *preimmagini* che i vari punti del piano possiedono (data  $f(x, \alpha)$ , le *preimmagini* di un punto  $(x, \alpha)$  sono tutti i punti  $(x', \alpha')$  tali che  $f(x', \alpha') = (x, \alpha)$ ). Le *linee critiche* separano zone del piano costituite da punti aventi un diverso numero di preimmagini e quando, in particolari zone, queste sono più di una è possibile che il bacino immediato di un attrattore abbia *preimmagini* in un'altra parte del piano, formanti una porzione staccata del bacino di attrazione.

In definitiva in casi come questo, l'analisi globale si rivela estremamente utile al fine di spiegare il comportamento di agenti non massimizzanti.

## 5. Conclusioni e sviluppi futuri

Nel presente lavoro abbiamo proposto un meccanismo decisionale di tipo adattivo su cui fondare l'ipotesi di comportamento razionale del consumatore precisandone le minimali richieste informative e computazionali. In questo modo, abbiamo ottenuto dei sistemi dinamici non-lineari la cui dimensionalità dipende dalla eventuale endogenizzazione delle preferenze. L'obiettivo del lavoro è stato quello di valutare la capacità del comportamento massimizzante di emergere asintoticamente in seguito alla esperienza di consumo e alla applicazione ripetuta del particolare meccanismo di scelta adattiva da noi proposto. I risultati che abbiamo ottenuto non sono univoci; possiamo dire, in sintesi, che il fondamento adattivo del comportamento razionale viene gradualmente meno quando si passa da una evoluzione in tempo continuo ad una in tempo discreto e quando nel modello di base (con preferenze esogene) si aggiunge più struttura al modello endogenizzando le preferenze. Più in particolare, il modello semplice in tempo continuo risulta globalmente stabile dando un forte fondamento alla ipotesi di perfetta razionalità. Nello

stesso modello collocato in una evoluzione di tempo discreto, la stabilità del punto stazionario e quindi la valenza del comportamento ottimizzante dipende dalla configurazione dei parametri: solo un coefficiente di reazione non eccessivo in combinazione con una preferenza non eccessivamente sbilanciata a favore di uno dei due beni è in grado di garantire la convergenza allo stato stazionario; la violazione di queste condizioni determinano l'emergere di dinamiche periodiche e caotiche. La dipendenza delle preferenze dalle scelte passate, oltre ad aumentare la dimensionalità del sistema porta ad avere altri due stati stazionari nei quali è implicita la scelta razionale; crediamo che questo aspetto rimetta in discussione l'approccio dominante anche dal punto di vista della storica questione della *unicità* delle soluzioni. Dinamicamente, la molteplicità degli stati stazionari porta ad avere, per certe configurazioni di parametri, la coesistenza di stati stazionari localmente stabili oppure la coesistenza di uno stato stazionario con attrattori di tipo periodico o caotico caratterizzati per di più da una combinazione di bacini di attrazione assai complicata.

Abbiamo anche mostrato come l'analisi locale possa essere limitante e fuorviante, perché non è in grado di discriminare tra due stati stazionari quello più significativo dal punto di vista della dimensione degli insiemi delle condizioni iniziali che compongono i loro bacini di attrazione. Nello stesso momento, abbiamo illustrato anche le potenzialità implicite nell'analisi globale per lo studio di sistemi non-lineari con molteplicità di attrattori. Circa la possibilità di adozione degli strumenti dell'analisi globale da parte della professione ci limitiamo a fare la seguente considerazione: la *molteplicità degli equilibri* è un antico problema (Ingrao e Israel (1990)) che si ripresenta periodicamente nell'analisi economica sempre sotto vesti diverse (ad esempio nella letteratura più recente, la presenza anche delle cosiddette trappole della povertà nei modelli di crescita endogena, la molteplicità degli equilibri nei modelli con aspettative razionali etc.), che, riteniamo, rappresenti una ricchezza della modellistica economica e non un vizio da eliminare e che soprattutto impone l'adozione di strumenti di analisi adeguati .

I possibili sviluppi di ricerca che intendiamo suggerire hanno a che fare con gli immancabili limiti del presente modello. La consueta indicazione di generalizzazione della funzione di utilità è imposta dalla nostra scelta di considerare solamente la classe di funzioni Cobb-Douglas; questa estensione permetterebbe di valutare la robustezza dei nostri risultati per preferenze più generali. Nel nostro modello è completamente assente il meccanismo di mercato e quindi una dinamica dei

prezzi dei beni; per considerare in modo esplicito i prezzi è necessario analizzare un mercato con un lato della domanda, definita da consumatori che agiscono secondo le ipotesi del nostro lavoro, e un lato dell'offerta, definita dalle imprese che producono i vari beni. Crediamo che le preferenze siano plasmate anche dalla interazione con gli altri agenti e che questo rapporto con gli altri possa avvenire, ad esempio, tramite fenomeni di tipo *bandwagon* e *snob*; questo possibile sviluppo darebbe luogo, matematicamente, ad ulteriori non-linearità, perché il parametro che regola la preferenza dipenderebbe anche dalle quantità consumate dagli altri agenti. Infine, crediamo che l'adozione di regole decisionali alternative debba essere valutata su un terreno *genuinamente evolutivo*, ossia strettamente darwiniano, in cui gli agenti dotati di regole decisionali con una fitness relativamente più alta siano, nel periodo successivo, imitati da un numero di agenti proporzionalmente più consistente (Weibull 1995); questo possibile sviluppo implica l'aggiunta di una ulteriore equazione dinamica, non-lineare (ad esempio un'equazione del replicatore) che dovrebbe descrivere l'evoluzione nel tempo delle quote dei vari tipi di agenti.

## APPENDICE A

### Prova della proposizione 3: Condizioni per l'esistenza di tre punti fissi

Innanzitutto osserviamo che il sistema formato dalla (5) e dalla (6) ammette sempre almeno una soluzione, cioè un punto fisso, perché la differenza tra le due parti destre:

$$d(x) = \frac{1}{k_1 + k_2 k_3^x} - \frac{p}{m} x$$

è tale che  $d(0) = \frac{1}{k_1 + k_2} > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = \frac{1}{k_1} - \infty = -\infty$ .

Per trovare condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di tre equilibri di questa equazione:

$$\frac{1}{k_1 + k_2 k_3^x} = \frac{p}{m} x$$

possiamo scriverla in questa forma equivalente:

$$\frac{m}{pk_2 x} - \frac{k_1}{k_2} = k_3^x$$

da cui:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{m}{pk_2 x} - \frac{k_1}{k_2}\right)}{\ln k_3}$$

a questo punto il sistema formato dalla (5) e dalla (6) fornisce lo stesso numero di soluzioni del sistema equivalente:

$$\begin{cases} z = x \\ \ln\left(\frac{m}{pk_2x} - \frac{k_1}{k_2}\right) \\ z = \frac{\quad}{\ln k_3} \end{cases} \quad (12)$$

Una condizione necessaria per l'esistenza di tre punti di equilibrio è che le due parti destre del sistema (12) abbiano le stesse derivate in due punti distinti e poi occorre trovare le condizioni per cui i punti di uguale derivata siano punti di tangenza tra le due curve del sistema (12).

La condizione per avere uguali derivate è:

$$-\frac{m}{\ln k_3(mx - pk_1x^2)} = 1$$

cioè:

$$pk_1 \ln k_3 x^2 - m \ln k_3 x - m = 0$$

la quale possiede queste due soluzioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m - \sqrt{m^2 + \frac{4mpk_1}{\ln k_3}}}{2pk_1} \\ x_2 &= \frac{m + \sqrt{m^2 + \frac{4mpk_1}{\ln k_3}}}{2pk_1} \end{aligned} \quad (13)$$

che esistono e sono distinte quando il radicando al numeratore è positivo:

$$m^2 + \frac{4mpk_1}{\ln k_3} > 0$$

cioè:

$$\frac{m}{p} > \frac{-4k_1}{\ln k_3}$$

che è la prima delle due componenti della condizione (7).

Affinché il punto della coppia (13) situato più in alto, cioè  $x = x_2$ , sia punto di tangenza occorre che:

$$\frac{p}{m} \left( \frac{m + \sqrt{m^2 + \frac{4mpk_1}{\ln k_3}}}{2pk_1} \right) = \left( k_1 + k_2 k_3 \frac{m + \sqrt{m^2 + \frac{4mpk_1}{\ln k_3}}}{2pk_1} \right)^{-1}$$

cioè:

$$\frac{2mpk_1}{m + \sqrt{m^2 + \frac{4mpk_1}{\ln k_3}}} = k_1 + k_2 k_3 \frac{m + \sqrt{m^2 + \frac{4mpk_1}{\ln k_3}}}{2pk_1}$$

dalla quale si ricava  $k_2^{\max}$ . Analogamente si otterrà la condizione affinché  $x = x_1$  sia punto di tangenza, ricavando  $k_2^{\min}$ .

## APPENDICE B

### Prova della proposizione 4: impossibilità di avere autovalori complessi e coniugati per la Jacobiana calcolata nei punti fissi

La matrice Jacobiana di un sistema bidimensionale è una matrice 4x4 del tipo:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

dove nel nostro caso:  $J_{11} = \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t}$ ,  $J_{12} = \frac{\partial x_{t+1}}{\partial \alpha_t}$ ,  $J_{21} = \frac{\partial \alpha_{t+1}}{\partial x_t}$  e  $J_{22} = \frac{\partial \alpha_{t+1}}{\partial \alpha_t}$ .

Gli autovalori sono complessi quando vale la condizione:

$$Tr^2 - 4Det < 0 \quad (14)$$

con  $Tr = J_{11} + J_{22}$  e  $Det = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$ .

Una condizione sufficiente (anche se non necessaria) affinché la condizione (14) non sia mai verificata è  $Det < 0$ , infatti in questo caso la (14) sarebbe la somma di due componenti sempre positive.

Nel nostro caso  $J_{22} = 0$  perché  $\alpha_{t+1}$  non dipende da  $\alpha_t$ , quindi la condizione  $Det < 0$  si riduce a:

$$Det = -J_{12}J_{21} < 0 \Leftrightarrow J_{12}J_{21} > 0 \quad (15)$$

Abbiamo che:

$$J_{21} = \frac{\partial \alpha_{t+1}}{\partial x_t} = \frac{-k_2 k_3^x \ln k_3}{(k_1 + k_2 k_3^x)^2}$$

che è sempre positiva perché il denominatore è sempre positivo così come il numeratore, data la restrizione  $0 < k_3 < 1$ .

In definitiva la (15) diventa:

$$J_{12} > 0$$

Sappiamo che:

$$J_{12} = \frac{\partial x_{t+1}}{\partial \alpha_t} = \left\{ \gamma (x^{\alpha-1} + \alpha x^{\alpha-1} \ln x) (m - px)^{1-\alpha} - \alpha x^{\alpha-1} (m - px)^{1-\alpha} \ln(m - px) + \right. \\ \left. + [(1 - \alpha)x^\alpha \ln x - x^\alpha] (-p)(m - px)^{-\alpha} + px^\alpha (1 - \alpha)(m - px)^{-\alpha} \ln(m - px) \right\}$$

raccogliendo i due termini logaritmici otteniamo:

$$J_{12} = \gamma \left\{ \ln x \left[ \alpha x^{\alpha-1} (m - px)^{1-\alpha} - px^\alpha (1 - \alpha)(m - px)^{-\alpha} \right] + \right. \\ \left. + \ln(m - px) \left[ px^\alpha (1 - \alpha)(m - px)^{-\alpha} - \alpha x^{\alpha-1} (m - px)^{1-\alpha} \right] + x^{\alpha-1} (m - px)^{1-\alpha} + px^\alpha (m - px)^{-\alpha} \right\}$$

possiamo ora raccogliere il termine  $\frac{x^\alpha}{(m - px)^\alpha}$  ottenendo:

$$J_{12} = \gamma \frac{x^\alpha}{(m - px)^\alpha} \left\{ \ln x \left[ \frac{\alpha}{x} (m - px) - p(1 - \alpha) \right] + \right. \\ \left. + \ln(m - px) \left[ p(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{x} (m - px) \right] + \frac{(m - px)}{x} + p \right\}$$

Si può osservare che all'interno della parentesi graffa, i due termini logaritmici moltiplicano espressioni che sono identiche a meno del segno. Nei punti fissi deve valere la relazione:

$x = \alpha \frac{m}{p}$ , che sostituita nella prima delle due espressioni (quella che moltiplica  $\ln x$ ) consente

di ottenere:

$$\frac{\alpha p}{\alpha m} \left( m - p \alpha \frac{m}{p} \right) - p(1 - \alpha) = p - \alpha p - p + \alpha p = 0$$

che è anche il valore dell'espressione che moltiplica  $\ln(m - px)$  e che ci consente di giungere al risultato che conferma l'impossibilità che gli autovalori della Jacobiana calcolata nei punti fissi siano complessi:

$$J_{12} = \gamma \frac{x^\alpha}{(m - px)^\alpha} \left[ \frac{(m - px)}{x} + p \right] > 0$$

infatti tutti i termini sono positivi vista la restrizione:  $m > px$ .

## Bibliografia

Alchian, A.A. (1950), "Uncertainty, Evolution and Economic Theory", *Journal of Political Economy*, 58, pp. 211-221.

Arrow K., L. Hurwicz, e H. Uzawa (1958), *Studies in Linear and Nonlinear Studies*, Stanford University Press, Stanford.

Baumol W. J. e R.E. Quandt (1964), "Rules of Thumb and optimally Imperfect Decisions", *American Economic Review*, 102, pp. 23-46.

Bischi, G.I., L. Gardini e C. Mira (1999), "Maps with Denominator. Part I: Some Generic Properties", *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 9, pp. 119-153.

Bischi, G.I., L. Gardini e C. Mira (2003), "Maps with Denominator. Part II: Noninvertible Maps with Simple Focal Points", *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 13, pp. 2253-2277.

Bischi, G.I., L. Gardini e C. Mira (2005), "Maps with Denominator. Part III: Non Simple focal Points and Related Bifurcations", *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 15, pp. 451-496.

Bischi G.I., A.K. Naimzada, (2000), "Global Analysis of a Dynamic Duopoly Game with Bounded Rationality", in J.A. Filar, V. Gaitsgory e K. Mizukami (ed.), *Annals of the International Society of Dynamic Games* (5), Birkhauser, Boston.

Bischi G.I. e F. Tramontana, (2007), "Basins of Attraction in an Evolutionary Model of Boundedly Rational Consumers", *Pure Mathematics Applications*, Forthcoming.

Conlisk J., (1996), "Why Bounded Rationality", *Journal of Economic Literature*, 34, pp. 669-700.

Dixit A., (1986), "Comparative Statics for Oligopoly", *International Economic Review*, 27, pp. 107-122.

D'Orlando F. e G. Rodano (2006), "Fondamenti teorici dell'ipotesi di razionalità: il ruolo dell'esperienza", *Economia Politica*, 23, pp. 425-452.

Corchon L. e A. Mas-Colell (1996), "On the Stability of Best Reply and Gradient Systems with Application to Imperfectly Competitive Models", 5, *Economics Letters*, pp. 59-65.

Furth D., (1986), "Stability and Instability in Oligopoly", *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 197-228.

Guckenheimer J. e P. Holmes, (1983), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York.

Gumowski I. e C. Mira, (1980), *Recurrence in Discrete Dynamic Systems*, Springer, New York.

Ingrao B., e G. Israel, (1990), *The Invisible Hand. Economic Equilibrium in the History of Science*, The M.I.T. Press, Cambridge, MA.

Kelley C.T., (1999), *Iterative Methods for Optimization*, SIAM,

Kirman A., T. Hens, E. Jager e L. Philips, (1999), "Exchange Rates in Oligopoly", *European Economic Review*, 43, pp. 621-648.

Lucas R.E. Jr, (1985), "Adaptive Behavior and Economic Theory", *Journal of Business*, 59, pp. S401-S426.

Mira C., L. Gardini, A. Barugola, e J.C. Chatala, (1996), *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*, World Scientific, Singapore.

Naimzada A.K., e E. Randon, (2006), "Randon "Technology Sharing Cartels under a Rule of Thumb", in corso di stampa su *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali*.

Naimzada A.K. e Ricchiuti, (2006), "Complex dynamics in a monopoly with a rule of thumb", sottomesso per la pubblicazione a *Applied Mathematics Letters*.

Rosen J., (1965), "Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave n-Person Games", *Econometrica*, 33, pp. 520-534.

Sargent T.J., (1993), *Bounded Rationality in Macroeconomics*, Oxford University Press, New York.

Varian H., (1992), *Microeconomic Analysis*, (3<sup>rd</sup> ed.), W.W. Norton & Company, New York.

Weibull J., (1995), *Evolutionary Game Theory*, The M.I.T. Press, Cambridge, MA.