



DEPARTMENT OF ECONOMICS  
UNIVERSITY OF MILAN - BICOCCA

WORKING PAPER SERIES

**Un modello caotico di determinazione del tasso  
di cambio in presenza di interventi sul mercato  
dei cambi e afflussi di capitale**

Ahmad Naimzada, Giorgio Ricchiuti

No. 82 - November 2004

# **Un Modello Caotico di Determinazione del Tasso di Cambio in presenza di interventi sul mercato dei cambi e afflussi di capitale <sup>1</sup>**

Ahmad Naimzada  
Università Milano – Bicocca

Giorgio Ricchiuti  
Università degli Studi di Firenze

## Sommario

Nel presente lavoro abbiamo costruito un modello di determinazione del tasso di cambio in presenza di agenti eterogenei (Banca Centrale, Investitori e Market Makers). Ampie fluttuazioni del tasso di cambio sono il risultato di dinamica endogena, in particolare scaturiscono dall'interazione della Banca Centrale, che interviene per stabilizzare il cambio intorno ad un livello obiettivo, e gli investitori-chartisti che guardano al differenziale fra il tasso di interesse interno ed estero. Per completare il modello, si è effettuato uno studio specifico assumendo che il comportamento degli agenti sia rappresentato da una funzione sigmoideale.

Parole Chiave: Modelli di Determinazione Tasso di Cambio, Agenti Eterogenei

JEL:

---

<sup>1</sup> Questo lavoro è il risultato della collaborazione avutasi tra i due autori per predisporre un modello che costituisce il capitolo primo della tesi di dottorato di Giorgio Ricchiuti.

# 1. Introduzione

All'inizio degli anni '70, con lo smantellamento degli accordi di Bretton Woods, molti economisti avevano enfatizzato il ruolo isolante dei tassi di cambio flessibili e la necessità di lasciare la determinazione del tasso di cambio alle libere forze del mercato.

La forte volatilità riscontrata e, soprattutto, la grande enfasi posta sul ruolo del tasso di cambio come ancora nominale per ridurre l'inflazione, riportò la discussione sull'opportunità di un intervento della Banca Centrale (BC) e sull'adozione di tassi di cambio fissi o quasi fissi per limitare le fluttuazioni.

In un recente lavoro Reinhart e Rogoff [2003] hanno individuato empiricamente che la maggior parte dei paesi, diversamente da quanto dichiarato nei questionari del Fondo Monetario, hanno attivamente controllato il livello del tasso di cambio effettuando operazioni sul mercato valutario. Calvo e Reinhart [2000] avevano già analizzato lo stesso comportamento per i Paesi Emergenti, evidenziando come per questi paesi ci sia una tendenziale *fear for floating*.

Malgrado alcuni articoli pongano attenzione sulla riduzione del numero di operazioni delle Banche Centrali sul mercato dei cambi [Schwartz 2000], una relazione sugli interventi coordinati a sostegno dell'euro redatta dal G-7 ci ricorda come questi rimangano un'importante politica attiva a sostegno del valore della valuta domestica [Sarno e Taylor 2001]. Inoltre, analizzando un'inchiesta su 22 autorità monetarie, Neely [2001] afferma che molte di queste intervengono frequentemente sui mercati monetari con l'esplicito fine di limitare le ampie fluttuazioni di breve termine e correggere i disallineamenti di lungo periodo.

Gli interventi non sono esclusivamente atti ad influenzare i movimenti dei tassi ma possono anche avere l'obiettivo di portare contestualmente ordine all'interno del mercato, ribilanciare il livello di riserve detenute ed, infine, essere attuati in ottemperanza di accordi multilaterali (caso emblematico è stato quello del Sistema Monetario Europeo). L'idea di base è che la BC agisca tentando o di ridurre le fluttuazioni determinatesi sul mercato dei cambi (*leaning against the wind*) o di influenzare il tasso di cambio per riportarlo ad un livello desiderabile (o supposto tale), determinato osservando i fondamentali dell'economia (*target*)<sup>2</sup>. È quest'ultima l'assunzione che facciamo: l'autorità monetaria intervenga per stabilizzare il tasso di cambio ad un suo valore obiettivo.

Con il presente lavoro, ci poniamo l'obiettivo di analizzare in regime di cambi flessibili l'efficacia dell'intervento dell'autorità monetaria nello stabilizzare il livello del tasso di cambio. A tal fine utilizziamo un modello di determinazione del tasso di cambio abbandonando l'assunzione di agente rappresentativo ed assumendo la razionalità limitata degli operatori. Gli articoli di Frankel e Froot [1990], di Day e Huang [1990] e l'analisi di De Grauwe et al. [1993] hanno aperto la strada a questa tipologia di modelli. Questi lavori mostrano come ampie fluttuazioni del tasso di cambio possano essere frutto di una dinamica endogena.

---

<sup>2</sup> È interessante notare come Dominguez e Frankel [1993] sostengano che la definizione di "politica contro il vento" dipenda in modo cruciale dalla posizione del tasso di cambio rispetto al livello desiderato dalla BC: se il mercato spinge verso l'*obiettivo* della BC, questa cercherà di soffiare nella direzione del vento.

Abbiamo inoltre assunto che gli agenti si comportino come chartisti<sup>3</sup>. In particolare abbiamo assunto che l'eccesso di domanda di moneta di questi operatori dipenda dal differenziale nei tassi di interesse. Da una parte si intende modellizzare una delle principale cause dei forti afflussi di capitale nei Paesi Emergenti [Calvo et al., 1996 e di Agénor e Montiel, 1999], dall'altra porre l'attenzione sul ruolo degli investimenti di portafoglio nel determinare l'andamento del tasso di cambio

Nel sezione successiva abbiamo il modello generale è ricostruito in ogni sua parte. Nella terza sezione abbiamo simulato il modello assumendo che gli eccessi di domanda dei due agenti sia modellato attraverso una funzione sigmoideale. Nell'ultima sezione riprendiamo le principali conclusioni.

## 2. Un Modello di Determinazione del Tasso di Cambio

Come discusso in De Grauwe et al. [1993], i modelli di determinazione del tasso di cambio con aspettative razionali e perfetta informazione ascrivono alla presenza di eventi casuali l'esistenza di perturbazioni e fluttuazioni irregolari del tasso di cambio. A partire dai lavori di Benhabib e Day [1980, 1981, 1982] ci si è interrogati sulla possibilità di replicare fluttuazioni irregolari all'interno di classici modelli deterministici, assumendo la non-linearità nei comportamenti degli agenti e la loro razionalità limitata.

Nell'ambito della teoria della determinazione del tasso di cambio, i lavori di Day e Huang [1990] e di De Grauwe et al. [1993] hanno cercato di giustificare l'instabilità naturale del mercato dei cambi, l'impossibilità di previsione del futuro e la tendenza a generare cicli irregolari usando modelli ad agenti eterogenei ed assumendo la loro non perfetta razionalità. In questo sono stati agevolati dalla presenza di studi sul comportamento degli operatori nel mercato valutario – e finanziario in generale – in cui è risultato difficile accettare l'esistenza di un agente rappresentativo e, per di più, ottimizzante. Ad esempio, Allen e Taylor [1990], analizzando il mercato londinese, hanno osservato non solo che gli operatori si dividono in chartisti e fondamentalisti ma anche che essi incorporano nella loro analisi il comportamento degli altri operatori.

Di seguito viene presentato un modello, con un risultato caotico, nel quale gli agenti presenti sul mercato monetario sono la Banca Centrale e gli investitori considerati nel loro insieme. Le preferenze e le regole di comportamento non lineari degli operatori sono in grado da sole di generare una sistema caotico senza l'ausilio di shock esogeni. L'ipotesi di non differenziazione degli investitori non è in contraddizione con l'evidenza empirica. Allen e Taylor [1990] osservano che, nel breve periodo (variazioni giornaliere), differenti regole di contrattazione hanno la stessa capacità predittiva.

Certamente non osserviamo nel mercato dei cambi fluttuazioni deterministiche, tuttavia il modello ci permette da una parte di ricostruire, realisticamente, le fluttuazioni del cambio, dall'altra di analizzare al meglio il ruolo degli interventi della BC in presenza di operatori le cui regole di contrattazione presentano retroattività.

### 2.1 Il Modello

---

<sup>3</sup> Per un'analisi ufficiale sul ruolo dei chartisti nei mercati finanziari si veda il lavoro di Allen e Taylor [1990].

La struttura del modello si basa sulle analisi di Day e Huang [1990, 1993] e di Sau [1998], sugli articoli di Westerhoff [2003a, 2003b, 2003c] e Szpiro [1994]. Tre sono gli operatori presenti sul mercato: i *market makers*, gli speculatori e la Banca Centrale (BC).

I *market makers* espletano la funzione di mediatori fra domanda ed offerta. Essi stabiliscono il prezzo della valuta al tempo  $t+1$  guardando all'eccesso di domanda presente sul mercato. La variazione del prezzo può essere così definita:

$$S_{t+1} = S_t + \gamma D_t(S_t) \quad \text{con } (\gamma > 0) \quad [1]$$

in cui  $S$  è il prezzo della valuta (un aumento di  $S$  indica l'apprezzamento della valuta),  $D_t$  è l'eccesso di domanda presente sul mercato al tempo  $t$ , e  $\gamma$  (strettamente positivo) esprime la velocità di reazione dei *market makers* all'eccesso di domanda. Si assume che essi stabiliscano il prezzo in un intervallo determinato (l'ora o il giorno), provvedendo contestualmente ad eseguire gli ordini.

L'eccesso di domanda complessivo dipende dall'eccesso di domanda degli speculatori ( $DS$ ) e da quello della Banca Centrale ( $DBC$ ):

$$D_t = DS_t + DBC_t \quad [2]$$

Esprimiamo l'eccesso di domanda degli speculatori come funzione del differenziale fra il livello dei tassi di interesse interni e quello prevalente sul mercato mondiale:

$$DS_t = f_\alpha(i_{t-1} - i^*) \quad \text{con } (\alpha > 0) \quad [3]$$

Il parametro  $\alpha$  rappresenta la velocità di reazione degli operatori. Esso ci dà un'indicazione sul grado di apertura del movimento di capitali del sistema economico osservato: quanto più è elevato  $\alpha$  tanto più gli operatori reagiscono se non osservano la parità dei tassi di interesse. Il parametro è influenzato principalmente dalle istituzioni, interne ed internazionali, che regolano i movimenti dei capitali, ma anche dalle innovazioni tecnologiche sviluppatesi nell'ambito delle telecomunicazioni: la possibilità data dalle nuove tecnologie di osservare tutti i mercati valutari contemporaneamente agevola il lavoro degli operatori finanziari e, soprattutto, lo velocizza.

L'idea di base è che gli operatori del mercato siano specializzati in investimenti di portafoglio a breve e brevissimo termine e, perciò, si caratterizzino per l'alta sensibilità ai cambiamenti nel differenziale di interesse.

Assumendo valida la parità scoperta dei tassi di interesse, possiamo trasformare la [3] nel seguente modo:

$$i_t = i^* + \frac{e_{t+1} - e_t}{e_t} \quad \text{in cui } e_t = \frac{1}{S_t}$$

Sostituendo  $S_t$ , dopo le opportune trasformazioni, otteniamo:

$$i_t = i^* + \frac{S_t - S_{t+1}}{S_{t+1}}$$

che, trasformando il tutto al tempo t-1 e sottraendo ad entrambi i membri  $i^*$ , diventa:

$$i_{t-1} - i^* = \frac{S_{t-1} - S_t}{S_t} \quad [4]$$

Inserendo la [4], la [3] può essere riscritta nel seguente modo:

$$DS_t = f_\alpha \left( \frac{S_{t-1} - S_t}{S_t} \right) \quad [5]$$

**Ipotesi 1.**

Si assume che la funzione rappresentante l'eccesso di domanda degli speculatori soddisfi le seguenti relazioni:

1.a) sia crescente  $f'_\alpha > 0$

1.b)  $f_\alpha(0) = 0$

▪

Se i tassi di interesse si eguagliano, non vi è eccesso di domanda di moneta da parte degli investitori. Inoltre l'eccesso di domanda è funzione crescente dell'aumento del differenziale: un tasso di interesse maggiore del tasso di interesse mondiale sposterà gli investitori sulla valuta domestica.

Differentemente, la BC determina la propria domanda guardando agli scostamenti fra un valore del tasso di cambio desiderabile,  $\bar{s}$ , e il valore effettivamente osservato. L'idea di base è che la BC intervenga sul mercato dei cambi per tentare di spingere il valore del tasso di cambio verso il valore obiettivo, risultato di un processo decisionale ottimizzante non esplicitato [Neely 2001]. L'eccesso di domanda della BC è quindi funzione della differenza fra il target e il livello del tasso di cambio osservato nel periodo:

$$DBC = g_\beta (\bar{s} - S_t) \quad \text{con } (\beta > 0) \quad [6]$$

Il parametro  $\beta$  (strettamente positivo) rappresenta la velocità di reazione delle autorità monetarie: più  $\beta$  è piccolo più la BC tende a preferire una completa fluttuazione del tasso di cambio. All'opposto un  $\beta$  grande indica la presenza di un sistema a fluttuazione sporca: la BC interviene sistematicamente per raggiungere il tasso di cambio obiettivo.

**Ipotesi 2.**

Si assume che la funzione rappresentante l'eccesso di domanda della BC soddisfi le seguenti assunzioni:

2.a) sia crescente  $g'_\beta > 0$

2.b)  $g_\beta(0) = 0$

Se il tasso di cambio è al livello obiettivo della BC, questa non interviene sul mercato dei cambi. Inoltre, l'eccesso di domanda di moneta per la BC cresce al crescere della distanza fra il livello desiderato ed il livello effettivo del tasso di cambio.

Sostituendo la [6], la [5] e la [2] nella [1] otteniamo l'equazione alle differenze del secondo ordine che definisce la determinazione del tasso di cambio:

$$S_{t+1} = S_t + \gamma \left[ f_\alpha \left( \frac{S_{t-1} - S_t}{S_t} \right) + g_\beta (\bar{S} - S_t) \right]. \quad [7]$$

**Proposizione 1.**

L'equazione [7] possiede uno ed un solo punto fisso:  $S^* = \bar{S}$

Dimostrazione

Per determinare il punto fisso poniamo  $S_{t+1} = S_t = S_{t-1} = S^*$ . Riscrivendo l'equazione [7] otteniamo:

$$S^* = S^* + \gamma \left[ f_\alpha \left( \frac{S^* - S^*}{S^*} \right) + g_\beta (\bar{S} - S^*) \right]$$

ovvero

$$\gamma \left[ g_\beta (\bar{S} - S^*) \right] = 0 \quad [8]$$

Essendo  $\gamma$  strettamente positivo, la [8] risulta verificata nel punto in cui la funzione  $g_\beta (\bar{S} - S^*) = 0$ , ossia, data l'ipotesi 2, nel punto in cui:

$$\bar{S} = S^* \quad [9]$$

(c.v.d.)  $\square$

Il punto fisso così determinato presenta un'implicazione molto importante: il tasso di cambio di equilibrio dipende dall'intervento della BC ed è in particolar modo dall'obiettivo che la banca si prefigge di raggiungere. Risulta a questo punto importante analizzare le condizioni di stabilità locale del punto fisso e, conseguentemente, la possibilità di osservare un movimento caotico.

**Proposizione 2.**

L'equazione [7] è localmente stabile se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \gamma g'_\beta > 0 \\ 2 - \gamma \left( \frac{1}{S^*} \right) \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial X_t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial Y_t} \right] - \gamma g'_\beta > 0 \\ -\gamma \frac{\partial f_\alpha}{\partial Y_t} \left( \frac{1}{X_t} \right) < 1 \end{cases} \quad [10]$$

Dimostrazione

La [7] può essere trasformata in un sistema planare di equazioni del primo ordine introducendo la variabile ausiliaria:  $S_{t-1} = Y_t = X_{t-1}$  :

$$\begin{cases} X_{t+1} = X_t + \gamma \left[ f_\alpha \left( \frac{Y_t - X_t}{X_t} \right) + g_\beta (\bar{S} - X_t) \right] \\ Y_{t+1} = X_t \end{cases} \quad [11]$$

La matrice jacobiana del sistema [11] è:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} & \frac{\partial X_{t+1}}{\partial Y_t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [12]$$

Dalla matrice [12] possiamo ricavare il sistema di disequazioni che individuano la stabilità locale<sup>4</sup>:

$$\begin{cases} 1 - TR^* + DET^* > 0 \\ 1 + TR^* + DET^* > 0 \\ DET^* < 1 \end{cases} \quad [13]$$

La traccia del sistema [12] è:

$$TR = \frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} = 1 - \gamma \left[ \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial X_t} \right) \left( \frac{Y_t}{X_t^2} \right) + g'_\beta \right]$$

che, calcolata nel punto fisso, risulta essere:

$$TR^* = 1 - \gamma \left[ \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial X_t} \right) \left( \frac{1}{S^*} \right) + g'_\beta \right] \quad [14]$$

Il determinante del sistema [12] è uguale a:

---

<sup>4</sup> L'asterisco indica che traccia e determinante sono calcolati nel punto fisso.



$$DET = -\frac{\partial X_{t+1}}{\partial Y_t} = -\gamma \frac{\partial f_\alpha}{\partial Y_t} \left( \frac{1}{X_t} \right)$$

Calcolato nel punto fisso, otteniamo:

$$DET^* = -\gamma \frac{\partial f_\alpha}{\partial Y_t} \left( \frac{1}{S^*} \right) \quad [15]$$

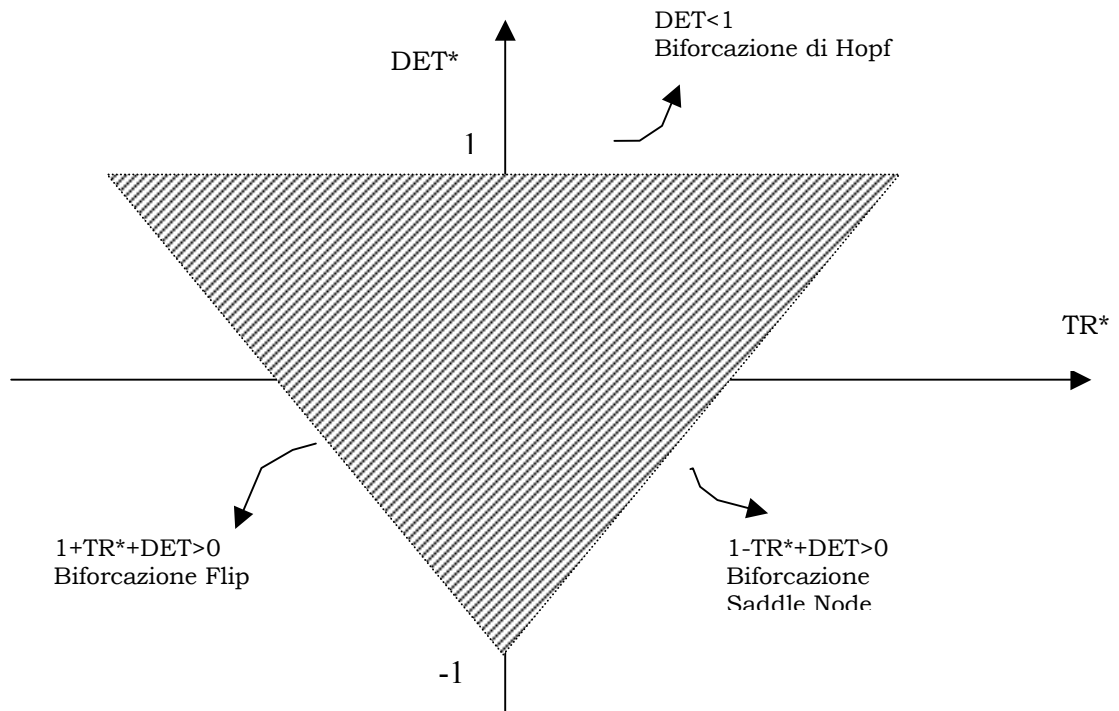
Sostituendo i valori delle equazioni [14] e [15] nel sistema [13] ed operando le opportune semplificazioni, otteniamo il sistema [10]:

$$\begin{cases} \gamma g'_\beta > 0 \\ 2 - \gamma \left( \frac{1}{S^*} \right) \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial X_t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial Y_t} \right] - \gamma g'_\beta > 0 \\ -\gamma \frac{\partial f_\alpha}{\partial Y_t} \left( \frac{1}{X_t} \right) < 1 \end{cases} \quad [16]$$

(c.v.d.) □

Il sistema [13] è rappresentato graficamente nella figura [1]. L'area all'interno del triangolo rappresenta il luogo dei punti per cui c'è stabilità locale. La violazione di una delle tre condizioni porta ad alla instabilità tramite una delle possibili biforcazioni.

**Figura 1 - Area di Stabilità Locale**



Essendo  $\gamma$  e la derivata prima di  $g$  maggiori di zero, la prima disequazione del sistema [16] è sempre verificata. Ciò vuol dire che non si presenta mai in questo

sistema una biforcazione del tipo Saddle-Node. Anche la terza disequazione è sempre verificata, infatti la derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $Y_t$  è positiva: non sono presenti biforcazioni del tipo Hopf. Solo il segno della seconda disequazione, che è rappresentativa delle biforcazioni di Flip, rimane incerto.

**Proposizione 3.**

L'equazione alle differenze [7] perde stabilità tramite una biforcazione Flip se e solo se:

$$2 - \gamma \left( \frac{1}{S^*} \right) \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial X_t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial Y_t} \right] - \gamma g'_\beta = 0 \tag{17}$$

Per una trattazione matematica della biforcazione Flip si vedano Gandolfo [1997], Devaney [1986] e Holmgren [1996].

L'equazione [17] individua i valori dei parametri tali per cui la dinamica del nostro sistema cambia: da una parte il punto fisso diventa instabile, dall'altra nasce un ciclo di periodo 2. Man mano che i valori della [17] si allontanano dal limite, abbiamo il raddoppio delle biforcazioni, come mostreremo oltre utilizzando metodi numerici (simulazioni).

Infine, è interessante notare come la presenza di una biforcazione di Flip dipenda criticamente:

- 1) dalla reattività dei *market makers* all'eccesso di domanda;
- 2) dalla reattività della BC in un intorno del punto fisso;
- 3) dalla variazione dell'eccesso di domanda degli speculatori rispetto ai valori presenti e passati di  $S$ .

Le proposizioni 1, 2 e 3 valgono per le tutte le classi di funzioni che soddisfano le ipotesi 1 e 2. Risulta tuttavia importante individuare una specifica forma funzionale al fine di simulare il comportamento degli operatori e, quindi, le traiettorie del tasso di cambio.

Si assume che la loro legge di comportamento sia non-lineare, in particolare sia espressa da una funzione sigmoideale. La preferenza è stata accordata a questo tipo di funzione perché permette di assumere limiti (le bande superiori ed inferiori) entro i quali avvengono le scelte degli operatori. Nelle due successive sezioni, studieremo rispettivamente il caso in cui le bande della forma sigmoideale sono simmetriche ed il caso in cui sono asimmetriche.

### 3.a Caso Specifico 1: Sigmoide con Bande Simmetriche<sup>5</sup>

Possiamo esplicitare le funzioni [3] e [6] nel seguente modo:

$$DS_t = f_\alpha(i_{t-1} - i^*) = \frac{2a}{1 + e^{-\alpha(i_{t-1} - i^*)}} - a \tag{18}$$

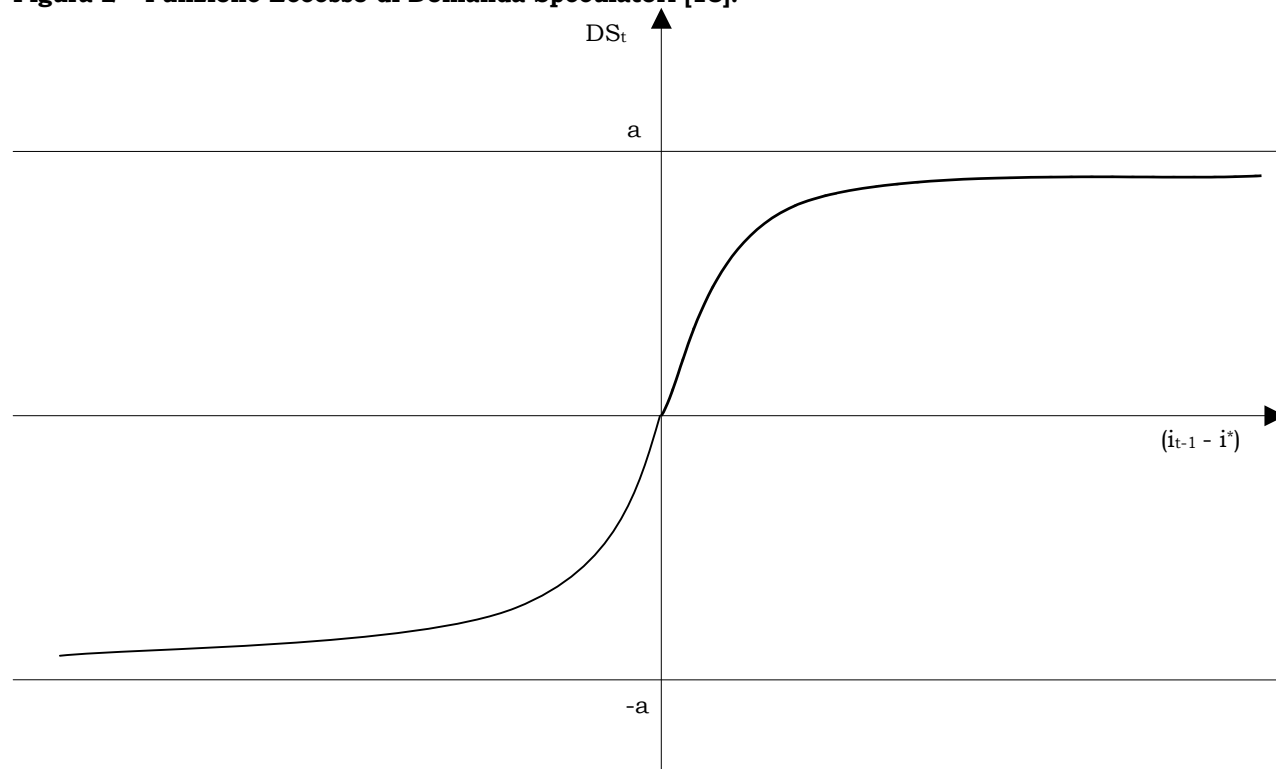
$$DBC = g_\beta(\bar{S} - S_t) = \frac{2b}{1 + e^{-\beta(\bar{S} - S_t)}} - b \tag{19}$$

---

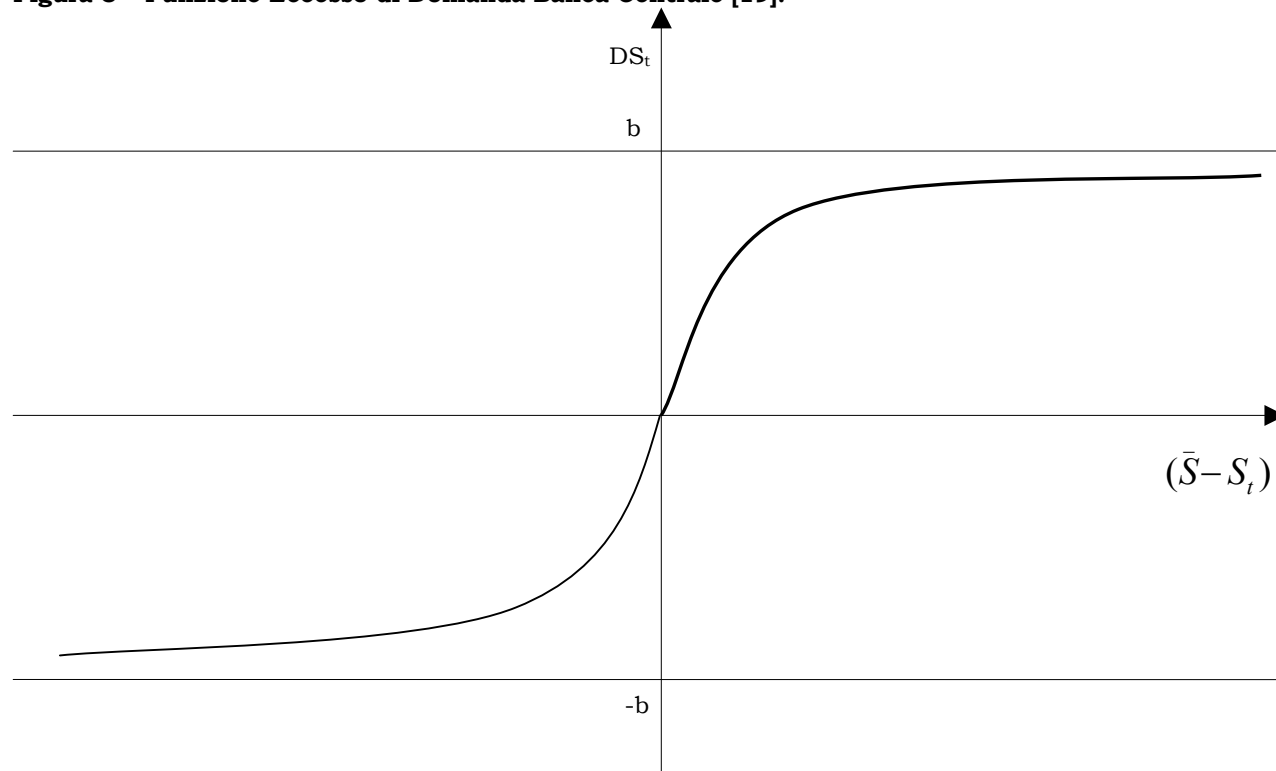
<sup>5</sup> Questa ipotesi sarà rimossa nella sezione successiva in cui assumeremo che le bande siano asimmetriche.

Le due funzioni sono riportate nelle figure (2) e (3). Graficamente possiamo notare come le due funzioni rispettino le ipotesi 1 e 2: sono crescenti e passano per l'origine.

**Figura 2 - Funzione Eccesso di Domanda Speculatori [18].**



**Figura 3 - Funzione Eccesso di Domanda Banca Centrale [19].**



Oltre alle implicazioni già discusse analizzando le due ipotesi, la forma funzionale assunta inserisce un forte elemento di non linearità: la presenza di bande. Queste individuano un limite superiore ed uno inferiore alle operazioni che i due operatori sono in grado di compiere.

La BC, ad esempio, può domandare moneta in eccesso quando il tasso di cambio è deprezzato rispetto al target individuato ( $\bar{S} > S_t$ ) solo fino al punto - banda superiore - in cui le sue riserve di moneta estera lo permettono. All'opposto, la banda inferiore individua il punto in cui risulta insostenibile per la BC continuare ad accumulare risorse, decidendo in tal modo di lasciare apprezzare il tasso di cambio.

Parallelamente anche gli speculatori hanno un limite all'eccesso di domanda o di offerta di valuta. Da una parte (limite superiore), l'eccesso di domanda è limitato perché un *gap* fra i tassi di interesse troppo elevato risulterebbe insostenibile e, quindi, gli operatori preferirebbero non acquistare valuta interna. Dall'altra (limite inferiore), si assume che non ci sia completa sostituzione della valuta con una valuta internazionale.

Per semplicità inizialmente assumiamo che le bande siano simmetriche, per poi esaminare il caso di bande asimmetriche nella successiva sezione.

Sostituendo l'equazione [4] nella [18] e quest'ultima, insieme alla [19], nella [7] otteniamo l'equazione alle differenze fondamentale:

$$S_{t+1} = S_t + \gamma \left[ f_\alpha \left( \frac{S_{t-1} - S_t}{S_t} \right) + g_\beta \left( \bar{S} - S_t \right) \right] = S_t + \gamma \left[ \left( \frac{2a}{1 + e^{-\alpha \left( \frac{S_{t-1} - S_t}{S_t} \right)}} - a \right) + \left( \frac{2b}{1 + e^{-\beta(\bar{S} - S_t)}} - b \right) \right] \quad [20]$$

Dato che le funzioni [18] e [19] soddisfano le ipotesi 1 e 2, sappiamo già che il punto fisso dell'equazione [20] è dato da

$$\bar{S} = S^*$$

Ciò che interessa analizzare adesso è la stabilità locale dell'equazione [20].

**Proposizione 4.**

L'equazione [20] è localmente stabile se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \frac{b\gamma\beta}{2} > 0 \\ 2 - \frac{\gamma\alpha}{P^*} - \frac{b\gamma\beta}{2} > 0 \\ S^* > -\frac{\gamma\alpha}{2} \end{cases} \quad [21]$$

Dimostrazione

La traccia della matrice [12] è uguale a:

$$TR = \frac{\partial X_{t+1}}{\partial X_t} = 1 - 2a\gamma \left( \frac{\alpha Y_t}{X_t^2} \right) \frac{e^{-\alpha \left( \frac{Y_t - X_t}{X_t} \right)}}{\left[ 1 + e^{-\alpha \left( \frac{Y_t - X_t}{X_t} \right)} \right]^2} - 2b\beta\gamma \frac{e^{-\beta(\bar{S} - X_t)}}{\left[ 1 + e^{-\beta(\bar{S} - X_t)} \right]^2}$$

Da questa espressione sostituendo per il punto fisso otteniamo:

$$TR^* = 1 - \frac{\alpha\gamma a}{2S^*} - \frac{b\beta\gamma}{2} \quad [22]$$

Il determinante della matrice [12] è:

$$DET = -\frac{\partial X_{t+1}}{\partial Y_t} = -2a\gamma \frac{e^{-\alpha \left( \frac{Y_t - X_t}{X_t} \right)}}{\left[ 1 + e^{-\alpha \left( \frac{Y_t - X_t}{X_t} \right)} \right]^2} \left( \frac{\alpha}{X_t} \right)$$

che, nel punto fisso, assume il seguente valore:

$$DET^* = -\frac{\gamma a \alpha}{2S^*} \quad [23]$$

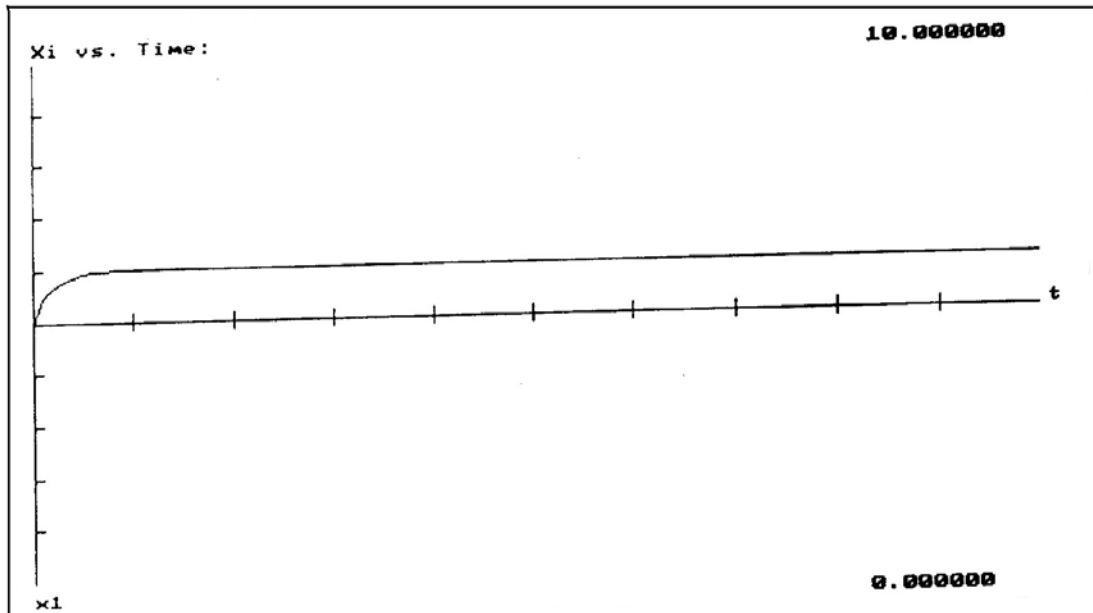
Sostituendo la [22] e la [23] nel sistema [13] otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{b\gamma\beta}{2} > 0 \\ 2 - \frac{\gamma a \alpha}{P^*} - \frac{b\gamma\beta}{2} > 0 \\ S^* > -\frac{\gamma a \alpha}{2} \end{cases} \quad [24]$$

(c.v.d.)  $\square$

Confermando l'analisi generale fatta precedentemente, la prima e la terza disequazione sono sempre verificate: non sono quindi presenti biforcazioni del tipo *saddle-node* o di Hopf. Infatti, essendo  $b$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  positivi, la prima disequazione è sempre verificata. Inoltre, la positività di  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $a$  ed  $S^*$  rendono sempre verificata la terza disequazione. La figura [4] presenta l'equazione [20] in caso di stabilità.

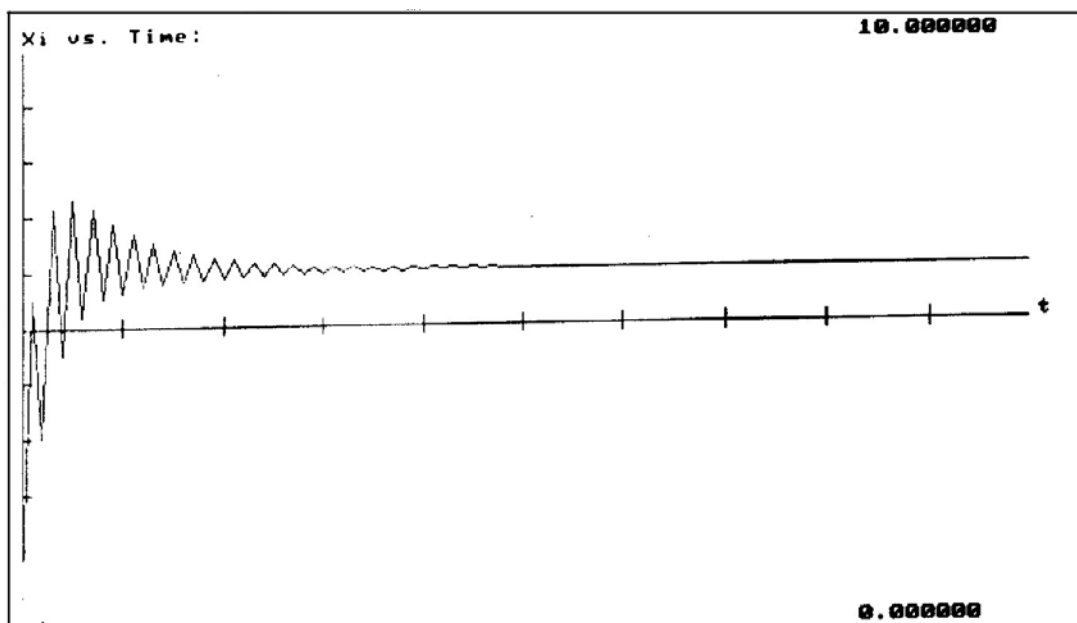
**Figura 4 - Equazione [20] - Bande Simmetriche.**



**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 4$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $b = 3$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\bar{S} = 6$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

I valori dei parametri riportati sotto la figura soddisfano la seconda disequazione, ciò vuol dire che il sistema è stabile localmente<sup>6</sup>. Infatti, date le condizioni iniziali, il sistema tende verso il suo livello di equilibrio, che nel nostro caso, così come previsto dalla proposizione 1, risulta essere l'obiettivo posto dalla BC. Nella figura [5] si è aumentata sia la reattività dei *market makers* ( $\gamma$ ), sia la reattività degli investitori,  $\alpha$ . Pur presentando un'iniziale andamento oscillatorio, il sistema – essendo ancora valida la seconda disequazione – si stabilizza convergendo al punto fisso.

**Figura 5 - Equazione [20] - Bande Simmetriche.**



<sup>6</sup> Avendo una molteplicità di parametri, i gradi di libertà della funzione sono ampi. Essendo le dinamiche qualitative del modello robuste per diverse configurazioni dei parametri, possiamo scegliere i valori dei parametri casualmente.

**Parametri:**  $\gamma = 0.95$ ,  $a = 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $b = 3$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\bar{S} = 6$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

**Proposizione 5.**

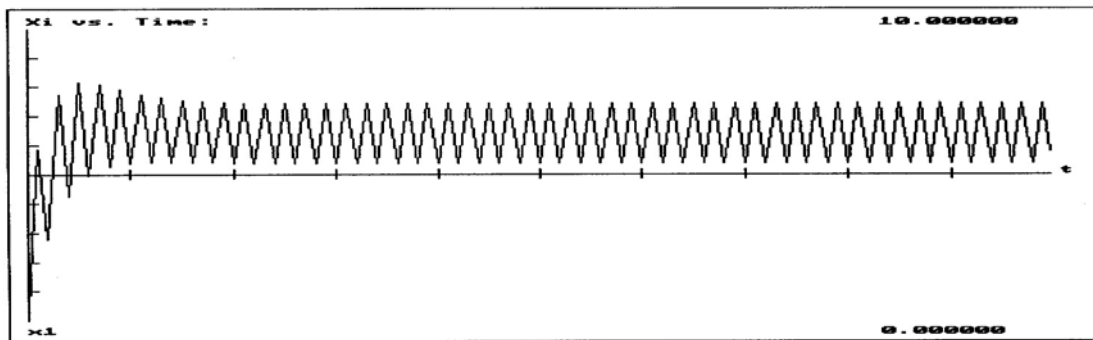
L'equazione alle differenze [20] presenta una biforcazione Flip se

$$2 - \frac{\gamma\alpha}{S^*} - \frac{b\gamma\beta}{2} = 0 \tag{25}$$

Se  $\alpha$  aumenta, ad es. passa da  $\alpha = 2$  ad  $\alpha = 2.5$ , osserviamo una biforcazione Flip. La seconda disequazione non è più soddisfatta ed il sistema, come si può osservare nella figura [6], si attesta su un'orbita di periodo 2. Questo risultato è molto importante. Il parametro  $\alpha$  rappresenta la reattività degli operatori. L'aumento di  $\alpha$  indica una maggiore integrazione dei sistemi finanziari e una maggiore mobilità dei capitali.

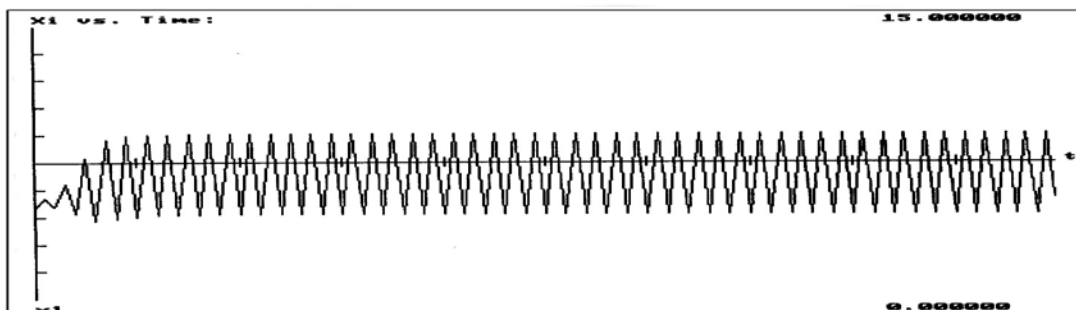
Una particolarità della biforcazione Flip è data dal raddoppio dei periodi. Per mostrare ciò interveniamo aumentando la reattività della BC. Le figure [7]-[9] mostrano come un aumento del parametro  $\beta$  porta, inizialmente, al raddoppio dei periodi – da un'orbita di periodo 2 nella figura [7] si passa ad un'orbita di periodo 4 nella [8] – per poi passare ad un sistema caotico (figura 9).

**Figura 6 - Equazione [20] - Bande Simmetriche.**



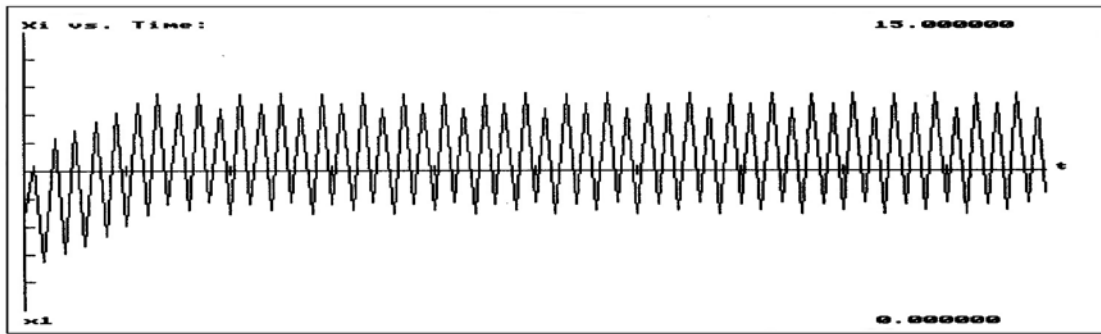
**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 4$ ,  $\alpha = 2.5$ ,  $b = 3$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\bar{S} = 6$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

**Figura 7 - Equazione [20] - Bande Simmetriche.**



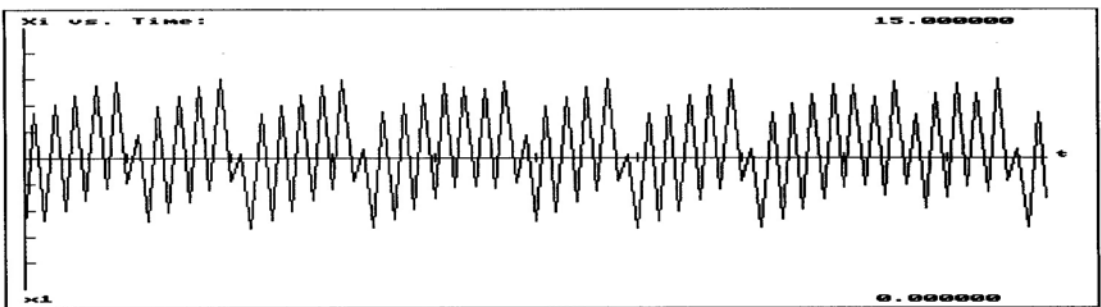
**Parametri:**  $\gamma = 0.9$ ,  $a = 4$ ,  $\alpha = 2.5$ ,  $b = 3$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\bar{S} = 6$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

**Figura 8 - Equazione [20] - Bande Simmetriche.**



**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 4$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $b = 3$ ,  $\beta = 4$ ,  $\bar{S} = 6$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

**Figura 9 - Equazione [20] - Bande Simmetriche.**

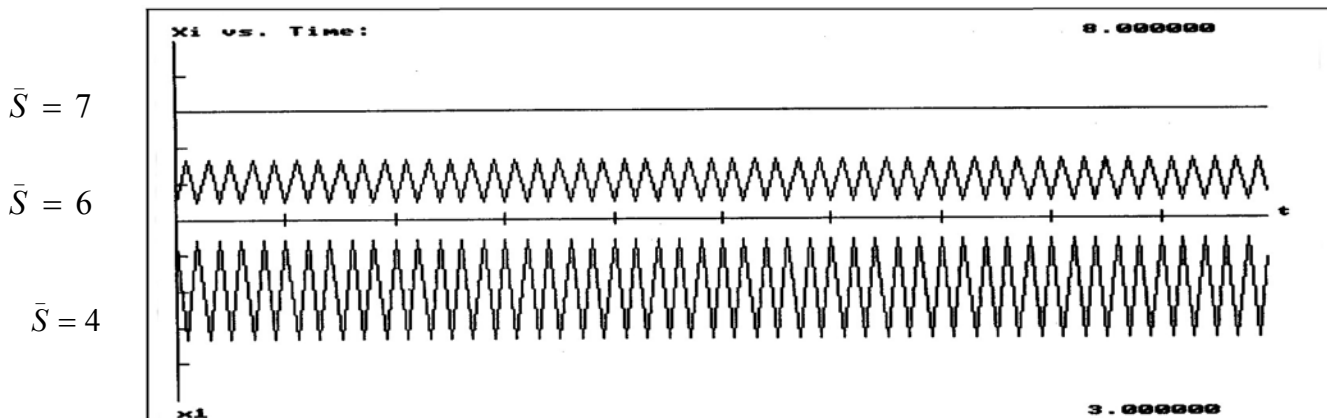


**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 4$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $b = 3$ ,  $\beta = 10$ ,  $\bar{S} = 6$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

Ai fini della nostra analisi risulta chiaro che una forte reattività della BC agli scostamenti dal valore di equilibrio, anziché produrre stabilità, crea effetti retroattivi che riproducono fluttuazioni irregolari.

Infine, sempre limitando la nostra analisi al caso di bande simmetriche, è interessante studiare la stabilità nel punto fisso al variare del target della BC. L'abbandono del target per un obiettivo più debole viene percepito dagli operatori come un rilassamento della BC nella sua politica di influenza del tasso di cambio. All'opposto, un livello maggiore riesce a spezzare gli effetti retroattivi degli investitori e conduce il tasso di cambio al livello desiderato dalla BC. Come si può osservare dalla figura [10], se la BC riduce il livello del target l'ampiezza delle fluttuazioni aumenta. All'opposto se il livello viene innalzato il sistema ritorna stabile.

**Figura 10 - Equazione [20] - Bande Simmetriche.**





**Parametri:**  $\gamma = 0.9$ ,  $a = 4$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $b = 0.5$ ,  $\beta = 4$ ,  $\bar{S} = 6$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

### 3.b Caso Specifico 2: Sigmoide con Bande Non Simmetriche

In questa sezione eliminiamo l'assunzione che le bande delle due funzioni sigmoidali siano simmetriche. Come già detto, per la BC il limite superiore è dato dallo stock di riserve estere accumulate, quindi legare a questa grandezza la banda inferiore vorrebbe dire ammettere l'impossibilità da parte della BC di accumulare infinitamente riserve.

Procediamo come nella sezione precedente, riscrivendo le funzioni di eccesso di domanda degli operatori ed analizzando la stabilità locale dell'equazione fondamentale alla luce delle modifiche indotte.

L'eccesso di domanda degli speculatori può essere così espresso:

$$DS_t = f_\alpha(i_{t-1} - i^*) = a \left[ \frac{a+b}{a+be^{-\alpha(i_{t-1}-i^*)}} - 1 \right] \quad [26]$$

mentre l'eccesso di domanda della BC è dato da

$$DBC = g_\beta(\bar{S} - S_t) = c \left[ \frac{c+d}{c+de^{-\beta(\bar{S}-S_t)}} - 1 \right] \quad [27]$$

Anche in questo caso vale che

- 1)  $\alpha$  e  $\beta$ , analiticamente, determinano la pendenza della sigmoide e rappresentano, rispettivamente, la velocità di reazione degli speculatori e della BC;
- 2)  $\bar{S} = S^*$  è il punto fisso del nostro sistema, essendo le ipotesi 1 e 2 soddisfatte.

Inoltre i parametri  $-a$  e  $-c$  rappresentano il livello della banda inferiore, mentre  $b$  e  $d$  il livello delle bande superiori. Portando ad esempio l'equazione [26], ma valendo i risultati anche per la [27], abbiamo che:

$$\lim_{i_t - i^* \rightarrow \infty} f_\alpha = a \left[ \frac{a+b-a}{a} \right] = b$$

$$\lim_{i_t - i^* \rightarrow -\infty} f_\alpha = a \left[ \frac{a+b}{\infty} - 1 \right] = -a$$

Date le equazioni [26], in cui abbiamo sostituito la [4], e la [27] possiamo riscrivere l'equazione di determinazione del tasso di cambio in presenza di bande asimmetriche come:

$$S_{t+1} = S_t + \gamma \left[ a \left( \frac{a+b}{a+be^{-\alpha\left(\frac{S_{t-1}-S_t}{S_t}\right)}} - 1 \right) + c \left( \frac{c+d}{c+de^{-\beta(\bar{S}-S_t)}} - 1 \right) \right] \quad [28]$$

Ci interessa studiare la stabilità nel punto per analizzare il ruolo svolto dalle bande.

**Proposizione 6.**

Il punto fisso dell'equazione [28] è stabile se:

$$\begin{cases} \frac{\gamma cd\beta}{(c+d)} > 0 \\ 2 - \frac{2\gamma ab\alpha}{(a+b)S^*} - \frac{\gamma cd\beta}{(c+d)} > 0 \\ S^* > -\frac{\gamma ab\alpha}{(a+b)} \end{cases} \quad [29]$$

Dimostrazione

Anche in questo caso possiamo trasformare l'equazione [28] in un sistema planare:

$$\begin{cases} X_{t+1} = X_t + \gamma \left[ a \left( \frac{a+b}{a+be^{-\alpha\left(\frac{Y_t-X_t}{X_t}\right)}} - 1 \right) + c \left( \frac{c+d}{c+de^{-\beta(\bar{S}-X_t)}} - 1 \right) \right] \\ Y_{t+1} = X_t \end{cases} \quad [30]$$

Utilizzando la matrice jacobiana [12] calcoliamo traccia e determinante per ricostruire il sistema di disequazioni [13] che individuano le condizioni di stabilità locale.

$$TR = 1 - \gamma\alpha(a+b) \frac{Y_t}{X_t^2} \frac{be^{-\alpha\left(\frac{Y_t-X_t}{X_t}\right)}}{\left[ a+be^{-\alpha\left(\frac{Y_t-X_t}{X_t}\right)} \right]^2} - \gamma\beta(c+d) \frac{de^{-\beta(\bar{S}-X_t)}}{\left[ c+de^{-\beta(\bar{S}-X_t)} \right]^2}$$

Da questo otteniamo i relativi valori per il punto  $S^* = \bar{S}$

$$TR^* = 1 - \frac{\gamma ab\alpha}{(a+b)} \left( \frac{1}{S^*} \right) - \frac{\gamma cd\beta}{(c+d)} \quad [31]$$

ed il determinante della matrice jacobiana:

$$DET = -\gamma a(a+b) \left( \frac{\alpha}{X_t} \right) \frac{be^{-\alpha \left( \frac{Y_t}{X_t} - 1 \right)}}{\left[ a + be^{-\alpha \left( \frac{Y_t}{X_t} - 1 \right)} \right]^2}$$

il cui valore nel punto fisso è:

$$DET^* = -\frac{\gamma ab \alpha}{(a+b)} \left( \frac{1}{S^*} \right) \quad [32]$$

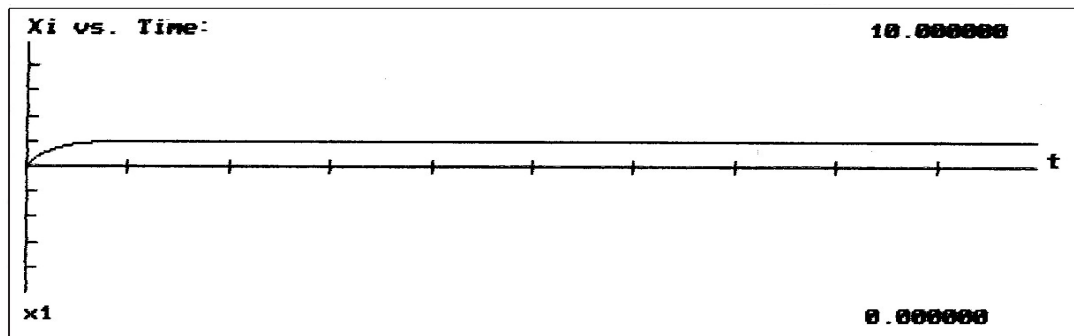
Sostituendo nel sistema [13] la [31] e la [32], otteniamo il sistema di disequazioni che individuano le condizioni di stabilità locale:

$$\begin{cases} \frac{\gamma cd \beta}{(c+d)} > 0 \\ 2 - \frac{2\gamma ab \alpha}{(a+b)S^*} - \frac{\gamma cd \beta}{(c+d)} > 0 \\ S^* > -\frac{\gamma ab \alpha}{(a+b)} \end{cases} \quad [33]$$

(c.v.d.)□

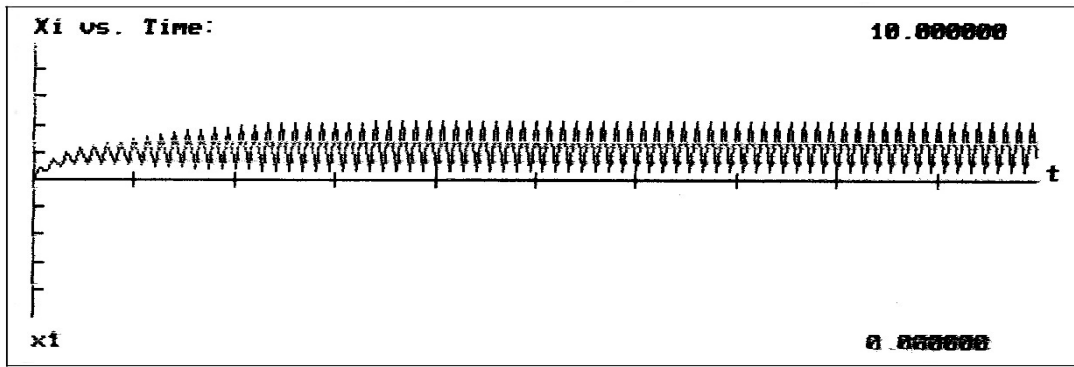
Per capire la differenza con il caso della sigmoide con Bande Simmetriche, la nostra analisi parte dagli effetti della variazione di alcuni parametri sulla stabilità del sistema nel punto fisso. Nella figura [11] abbiamo scelto dei parametri tali per cui il sistema tende al suo punto fisso ed è stabile.

**Figura 11 - Equazione [28] - Bande Asimmetriche.**



**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 5$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $b = 4$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\bar{S} = 6$ ,  $c = 3.5$ ,  $d = 2.5$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

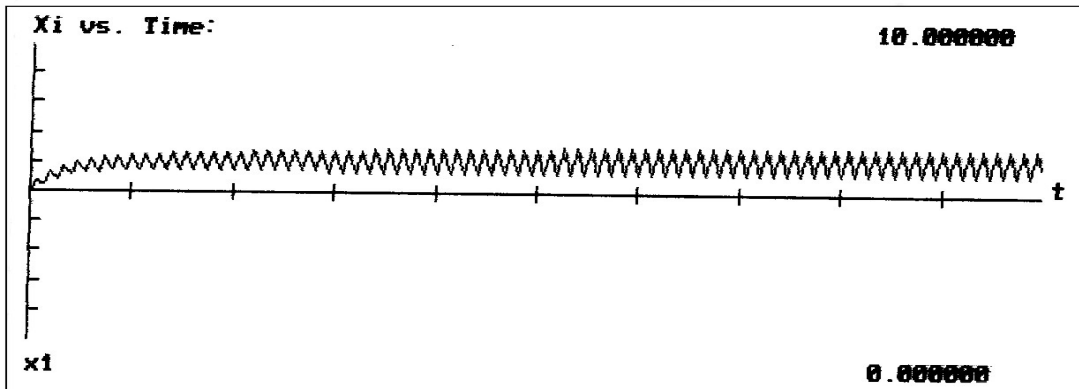
**Figura 12 - Equazione [28] - Bande Asimmetriche.**



**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 5$ ,  $\alpha = 2.8$ ,  $b = 4$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\bar{S} = 6$ ,  $c = 3.5$ ,  $d = 2.5$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

La prima variazione ai parametri che operiamo è un aumento della reattività degli operatori. Come mostra la figura [12] e come ci aspettiamo analizzando matematicamente la seconda equazione del sistema [33], abbiamo una biforcazione del tipo Flip con un raddoppio di periodo. Partendo da questa parametrizzazione, risulta interessante analizzare l'impatto di una variazione delle bande della funzione *eccesso di domanda* della BC. Abbiamo ridotto l'ampiezza delle bande sia degli investitori che della BC. Le figure [13] e [14] sono il risultato di una restrizione delle bande della funzione di eccesso di domanda della BC.

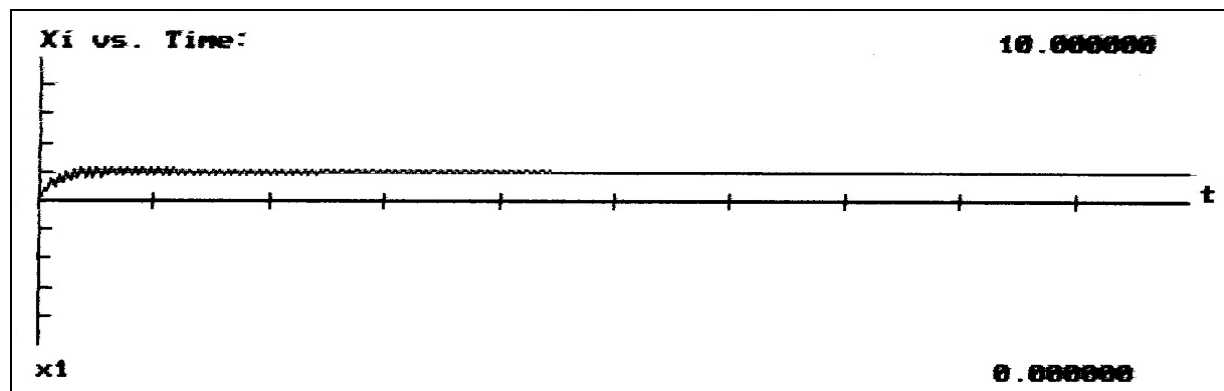
**Figura 13 - Equazione [28] - Bande Asimmetriche.**



**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 5$ ,  $\alpha = 2.8$ ,  $b = 4$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\bar{S} = 6$ ,  $c = 3$ ,  $d = 2$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

Il risultato è, nella figura [13], una riduzione dell'ampiezza delle fluttuazioni, mentre nella figura [14] la stabilizzazione del sistema.

Figura 14 - Equazione [28] - Bande Asimmetriche.



**Parametri:**  $\gamma = 0.8$ ,  $a = 5$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $b = 4$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\bar{S} = 6$ ,  $c = 2.5$ ,  $d = 1.55$ . **Valori iniziali:**  $X_0 = 5$ ,  $Y_0 = 5$ .

Ciò vuol dire che la BC può raggiungere il suo obiettivo di stabilizzazione intervenendo nel sistema in modo discontinuo e per limitati valori. Quanto più intenso è l'intervento delle autorità monetarie, tanto più destabilizzante sarà l'effetto determinato sul mercato dei cambi.

## 4. Conclusioni

In questo lavoro, attraverso un semplice modello di determinazione del tasso di cambio, abbiamo cercato di rappresentare due caratteristiche dei mercati emergenti durante gli anni '90: l'aumento dei flussi di capitale e la volontà da parte delle Banche Centrali di stabilizzare il tasso di cambio.

Assumendo eterogeneità degli operatori del mercato monetario e razionalità limitata, abbiamo dimostrato come un comportamento caotico possa essere ottenuto endogenamente, senza utilizzare l'ipotesi di shock esogeni. In particolare, abbiamo assunto che gli speculatori si comportino come chartisti e prendano le loro decisioni guardando al differenziale dei tassi di interesse. In tal modo abbiamo voluto modellizzare l'effetto di variazione nei rendimenti sullo spostamento di capitali.

D'altra parte abbiamo ipotizzato che la Banca Centrale individui, secondo un processo decisionale non esplicitato, un target di tasso di cambio ed operi al fine di mantenere tale livello. In tal modo, pur assumendo un regime di cambio flessibile, abbiamo cercato di modellizzare la *paura per la fluttuazione* [Calvo e Reinhart 2000, Reinhart e Rogoff 2003].

L'emergere di dinamiche caotiche può essere determinato:

- dall'aumento della reattività dei *market makers*;
- dall'aumento della reattività della Banca Centrale agli scostamenti dal target specificato;
- dalla reazione degli operatori finanziari al differenziale dei tassi di interesse.

Infine, abbiamo dato forma funzionale all'*eccesso di domanda* della Banca Centrale e degli speculatori. La forma sigmoideale ha permesso di analizzare due caratteristiche: un parametro che identifichi la reattività degli operatori e l'effetto

della grandezza delle bande sulla determinazione del tasso di cambio. Abbiamo ottenuto che quanto più aumenta la reazione degli speculatori e della Banca Centrale, sia in termini di velocità che di grandezza degli interventi, tanto più avremo l'emergere di dinamiche complesse. Le aumentate possibilità degli operatori di intervenire celermente sul mercato valutario e l'aumentata volontà delle Banche Centrali di stabilizzare il tasso di cambio può aumentare l'indeterminatezza dei valori del tasso di cambio stesso.

## Bibliografia

- Agénor, P.R. – Montiel, P.J. (1999), *Development Macroeconomics*, Princeton University Press
- Allen, H. – Taylor, M.P. (1990), “Charts, Noise and Fundamentals in the London Foreign Exchange Market”, *Economic Journal*, vol. 100, pp.49-59
- Benhabib, J. – Day, R. (1980), “Erratic Accumulation”, *Economics Letter*, VI, pp. 113-118
- Benhabib, J. – Day, R. (1981), “Rational Choice and Erratic Behavior”, *Review of Economic Studies*, XLVIII, pp. 459- 471
- Benhabib, J. – Day, R. (1982), “A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, IV, pp. 37-55
- Calvo, G. – Leiderman, L. – Reinhart, C. (1996), “Inflows of Capital to Developing Countries in the 1990s”, *The Journal of Economic Perspectives*, vol. 10, Issue 2, pp. 123-139
- Calvo, G. – Reinhart, C. (2000), “Fear for Floating”, NBER Working Paper n. 7993
- Day, R. – Huang, W. (1990), “Bulls, Bears and Market Sheep”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol. 14, pp. 299-329
- Day, R. – Huang, W. (1993), *Chaotically Switching Bear and Bull Markets: The Derivation of Stock Price Distributions from Behavioural Rules*, in Day, R. – Chen, P., *Non Linear Dynamics and Evolutionary Economics*, Oxford University Press
- De Grauwe, P. – Dewachter, H. – Embrechts, M. (1993), *Exchange Rate Theory. Chaotic Models of Foreign Exchange Markets*, Blackwell
- De Gregorio, J. – Edwards, S. – Valdés, R.O. (2000), “Controls on Capital Inflows: Do They Work?”, *Journal of Development Economics*, vol. 63, pp. 59-83
- Devaney, R.L. (1986), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, The Benjamin/Cummings Publishing co.
- Dominguez, K.M. – Frankel, J.A. (1993), *Does Foreign Exchange Intervention Work?*, Institute for International Economics
- Frankel, J. – Froot, K.A. (1990), “Chartists, Fundamentalists and the Demand for Dollars”, in Courakis, A.S. – Taylor, M.P., *Private Behaviour and Government Policies in Interdependent Economies*, Oxford University Press
- Gandolfo, G. (1997), *Economics Dynamics. Study Edition*, Springer-Verlag
- Holmgren, R.A. (1996<sup>2</sup>), *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer-Verlag
- Isard, P. (1995), *Exchange Rate Economics*, Cambridge University Press

Neely, C. (2001), "The Practice of Central Bank Intervention: Looking Under the Hood", Federal Reserve Bank of St. Louis, Working Paper Series

Peters, E.E. (1991), *Chaos and Order in the Capital Markets. A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, John Wiley & Sons

Peters, E.E. (1994), *Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons

Reinhart, C.M. – Rogoff, K.S. (2003), "The Modern History of Exchange Rate Arrangements: A Reinterpretation", mimeo

Sarno, L. – Taylor, M. (2001), "Official Intervention in the Foreign Exchange Market: Is it Effective and, If So, How Does it Work?", *Journal of Economic Literature*, vol. XXXIX, pp. 839-868

Sau, R. (1998), "Globalization Finance and Industry: a Search for Stability", *Economia Internazionale*, vol. 51, fascicolo 1, pp. 79-100

Schwartz, A.J. (2000), "The Rise and Fall of Foreign Exchange Market Intervention", NBER Working Paper 7751

Szpiro, G.G. (1994), "Exchange Rate Speculation and Chaos Inducing Intervention", *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol. 24, pp. 363-368

Westerhoff, F.H. (2003a), "Central Bank Intervention and Feedback Traders", *International Finance, Institution and Money*, vol. 13, pp.419-427

Westerhoff, F.H. – Wieland, C. (2003b), "Spill-over Dynamics of Central Bank Interventions", Department of Economics, University of Osnabueck, Germany, mimeo

Westerhoff, F.H. – Wieland, C. (2003c), "Exchange Rate Dynamics, Central Bank Interventions and Chaos Control Methods", Department of Economics, University of Osnabueck, Germany, mimeo